GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/2.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr $(\alpha -$ *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r -$ *raio*$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ $(\alpha -$ *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* $r -$ *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha -$ *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r -$ *raio*$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ $(\alpha -$ *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* $r -$ *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $(r -$ *raio da base*; $g -$ *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ $(r -$ *raio*$)$

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ $(r -$ *raio da base*; $g -$ *geratriz*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ $(r -$ *raio*$)$

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Dois grupos musicais venceram concursos televisivos, o que lhes permitiu o lançamento, no mercado nacional, dos seus álbuns de estreia, designados, respetivamente, por $\acute{A}lbum\ F$ e por $\acute{A}lbum\ G$.

Os dois grupos têm a mesma editora discográfica e o lançamento dos álbuns de estreia realizou-se na mesma data. Antes dessa data, e durante um certo período de tempo, a editora promoveu na Internet uma pré-venda dos álbuns, permitindo aos fãs a aquisição de exemplares com uma capa especial.

Admita que:

- o número, em milhares, de exemplares do $\acute{A}lbum\ F$ vendidos até ao instante t é dado, aproximadamente, por
$$f(t) = \frac{14}{1+6e^{-0,3t}}$$
- o número, em milhares, de exemplares do $\acute{A}lbum\ G$ vendidos até ao instante t é dado, aproximadamente, por
$$g(t) = \frac{12}{1+3e^{-0,5t}}$$
- nos dois modelos, a variável t representa o tempo, em meses, decorrido desde a data do lançamento do $\acute{A}lbum\ F$ e do $\acute{A}lbum\ G$.

1. Qual foi o álbum mais vendido no período de pré-venda?

Na sua resposta, apresente o número de exemplares de cada álbum vendidos no período de pré-venda.

2. Determine quanto tempo decorreu desde a data do lançamento dos álbuns até à data em que o número de exemplares vendidos do $\acute{A}lbum\ F$ ultrapassou o número de exemplares vendidos do $\acute{A}lbum\ G$.

Apresente o resultado em meses, arredondado às unidades.

Resolva o problema, recorrendo às potencialidades gráficas da sua calculadora.

3. Em Portugal, o *Disco de Platina* é um galardão entregue a um grupo ou artista musical se as vendas de um dos seus álbuns atingirem as $15\,000$ unidades.

Algum dos grupos será galardoado com o *Disco de Platina*, pelas vendas do seu álbum de estreia, de acordo com os modelos apresentados?

Justifique a sua resposta.

GRUPO II

A descoberta de ouro no Brasil trouxe, no século XVIII, alterações significativas à vida da corte portuguesa e refletiu-se na arte e no estilo do mobiliário português da época.

1. Admita que, numa determinada mina de ouro, foi necessário construir um poço, que permitisse um acesso direto às galerias da mina situadas a maior profundidade.

Dadas as características geológicas do subsolo e a complexidade dos trabalhos de escavação, o número de metros escavados em cada dia foi progressivamente diminuindo, até se alcançar a profundidade pretendida.

Sabe-se que:

- no final do primeiro dia de trabalho, o poço ficou com 30 metros de profundidade;
- no segundo dia, foram escavados $28{,}5$ metros (95% de 30 metros), ficando o poço, no final desse dia, com $58{,}5$ metros de profundidade.

Admita que os trabalhos prosseguiram, de modo que, em cada dia, a partir do segundo, a profundidade acrescentada ao poço, em metros, foi 95% da profundidade acrescentada ao poço no dia anterior.

Considere a sequência (p_n), em que p_n é o número de metros acrescentados à profundidade do poço, no dia de trabalho de ordem n

1.1. Quantos metros foram acrescentados à profundidade do poço no décimo dia de trabalho?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resposta, comece por justificar que os termos da sequência (p_n) são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $0{,}95$

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Determine quantos dias de trabalho foram necessários para que a profundidade do poço ultrapassasse 575 metros.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. A Beatriz resolveu corretamente um problema de programação linear sobre mobiliário português do século XVIII e elaborou um relatório do qual constavam o enunciado e a resolução detalhada do mesmo. Entretanto, devido a um problema informático, perdeu parte do enunciado e parte da resolução.

Do enunciado, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte.

«Uma empresa de mobiliário produz, artesanalmente, cadeiras de estilo português do século XVIII, estilo D. José *e* estilo D. Maria I*, estando assegurada a venda de todas as cadeiras que produza.*

Na produção destas cadeiras, estão envolvidas três secções da empresa: a secção de marcenaria, a secção de revestimento e a secção de acabamento. Para o efeito, a secção de marcenaria dispõe de 720 horas mensais, a secção de revestimento dispõe de 320 horas mensais e a secção de acabamento dispõe de 440 horas mensais.

A empresa obtém 300 euros de lucro com a venda de cada cadeira estilo D. José*.»*

Quanto à resolução, conseguiu recuperar apenas o excerto seguinte.

«*Designo por x o número de cadeiras* estilo D. José *produzidas, mensalmente, pela empresa.*

A limitação das horas mensais na secção de marcenaria traduz-se pela condição

$$6x + 4y \leq 72$$

A limitação das horas mensais na secção de revestimento traduz-se pela condição

$$2x + 2y \leq 32$$

A limitação das horas mensais na secção de acabamento traduz-se pela condição

$$4x + 2y \leq 44 \text{ »}$$

A Beatriz sabe que a função objetivo é o lucro obtido pela empresa com a venda das cadeiras dos dois estilos e que o lucro máximo, 3600 euros, se obtém no ponto de coordenadas $(8, 6)$

Elabore uma pequena composição, na qual:

- refira o significado da variável y
- indique, justificando, o número de horas utilizadas em cada uma das secções da empresa na produção de uma cadeira *estilo D. José*;
- escreva, justificando, uma expressão da função objetivo.

GRUPO III

Num terreno agrícola, retangular, é necessário colocar uma rede, de modo a dividir o terreno em três partes: uma parte com a forma de um triângulo e cada uma das outras com a forma de um trapézio retângulo.

Na Figura 1, o retângulo $[ABCD]$ representa o terreno e os três segmentos de reta a traço mais grosso representam a rede. O esquema da figura não está desenhado à escala.

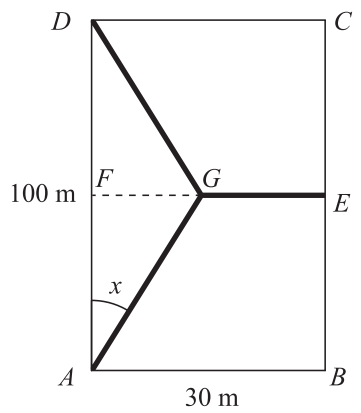

Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto E é o ponto médio de $[BC]$
- o ponto F é o ponto médio de $[AD]$
- o ponto G é um ponto móvel que pertence a $[EF]$
- x é a amplitude, em graus, do ângulo GAF, com $x \in]0, 25]$
- os lados correspondentes a $[AB]$ e a $[AD]$ medem, respetivamente, $30\,\mathrm{m}$ e $100\,\mathrm{m}$

O comprimento da rede depende do valor de x

1. Mostre que o comprimento, R, em metros, da rede pode ser dado, em função de x, por

$$R(x) = 30 + \frac{100 - 50\,\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Na sua resposta, poderá começar por escrever $\overline{FG}$ em função de $\mathrm{tg}(x)$

2. Para um certo valor de x, verifica-se que $\cos(x) = \frac{12}{13}$

Mostre que, para esse valor de x, o comprimento da rede é igual a $117{,}5\,\mathrm{m}$

Na sua resolução, utilize apenas valores exatos.

3. Sabe-se que $\dfrac{R(25)-R(15)}{25-15} \approx -0{,}3$

Interprete, no contexto do problema, o significado desta expressão e do seu valor.

4. Considere a função T, que dá, em metros por grau, a taxa de variação instantânea da função R, para cada valor de x

Na Figura 2, apresenta-se o gráfico da função T

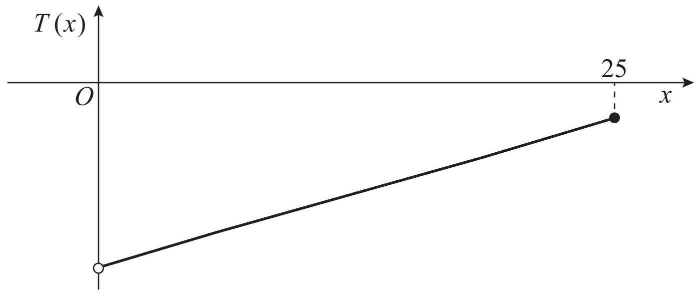

Figura 2

O que se pode concluir quanto à monotonia da função R ?

Justifique a sua resposta, com base no gráfico da função T

Página em branco

GRUPO IV

Numa escola, o professor de Matemática B propôs aos alunos das turmas I e J, do curso de Artes Visuais, a elaboração de trabalhos subordinados ao tema «Matemática e Arte».

1. Os alunos do curso de Artes Visuais distribuem-se por turmas e por género de acordo com a tabela seguinte.

	Rapazes	Raparigas
Turma I	10	18
Turma J	a	10

Escolhido, ao acaso, um destes alunos, a probabilidade de ser rapaz é $\frac{6}{13}$

Determine o valor de a

2. Considere as seguintes variáveis aleatórias:

X: «tempo gasto, em minutos, por um aluno da turma I, na elaboração do respetivo trabalho»

Y: «tempo gasto, em minutos, por um aluno da turma J, na elaboração do respetivo trabalho»

As variáveis aleatórias X e Y seguem distribuições normais, ambas de valor médio 220 minutos.

Admita que:

$$P(200 < X < 240) \approx 0{,}6827 \quad \text{e} \quad P(200 < Y < 240) \approx 0{,}9545$$

Qual das variáveis aleatórias X e Y tem menor desvio padrão?

Justifique a sua resposta.

3. Os *Sangakus* são tábuas de madeira, existentes em diversos santuários no Japão, que contêm problemas matemáticos, envolvendo conceitos geométricos. Os *Sangakus* mais antigos que se conhecem datam do século XVII.

A Figura 3 apresenta parte de uma tábua *Sangaku*.

O trabalho elaborado por um dos alunos, representado na Figura 4, consistiu numa pintura alusiva a um dos problemas de uma tábua *Sangaku*.

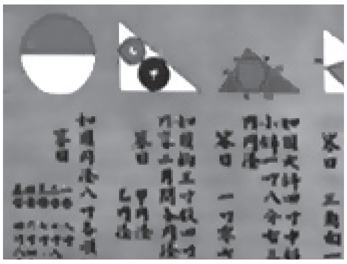

Figura 3

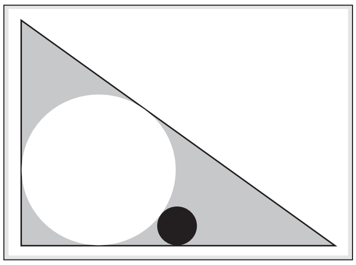

Figura 4

A Figura 5 reproduz um esquema elaborado com base na pintura do aluno.

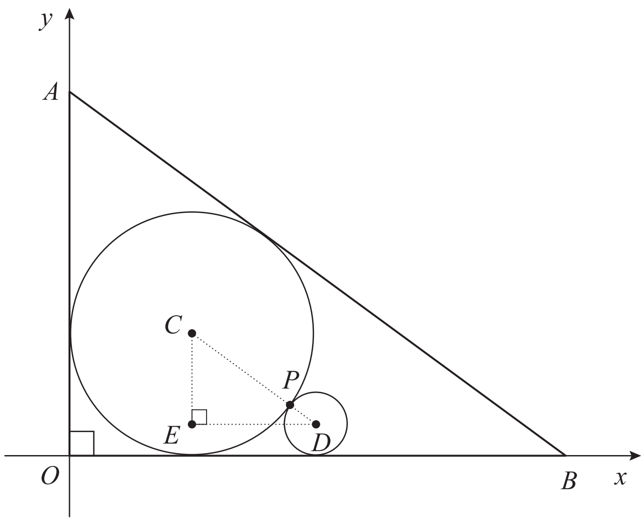

Figura 5

Neste esquema, estão representados, num referencial ortogonal e monométrico xOy:

- a circunferência de centro no ponto C, tangente aos eixos coordenados;
- a circunferência de centro no ponto D, tangente ao eixo Ox e tangente, no ponto P, à circunferência de centro C

- os pontos A e B, pertencentes a Oy e Ox, respetivamente, tais que a reta AB é tangente à circunferência de centro C
- o triângulo $[AOB]$
- o ponto E, interior à circunferência de centro C, tal que $[ED] /\!/ [OB]$
- o triângulo $[CED]$, retângulo em E

O ponto P pertence a $[CD]$ e $\overline{CP} > \overline{PD}$

3.1. Admita que:

- o triângulo $[AOB]$ é uma ampliação do triângulo $[CED]$, sendo a razão de semelhança igual a 4
- $\overline{CE} = 3$
- $\overline{OB} = 16$

Determine a equação reduzida da reta AB

3.2. Admita, agora, que os triângulos $[AOB]$ e $[CED]$ não são semelhantes.

Sejam r e s os raios das circunferências de centros C e D, respetivamente, tais que $r \times s = 9$

Determine $\overline{ED}$

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– escrever $\overline{CE}$ e $\overline{CD}$ em função dos raios das duas circunferências;

– aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo $[CED]$ para calcular $\overline{ED}$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		15 pontos
		45 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	10 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		20 pontos
		45 pontos

GRUPO III

1.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		10 pontos
4.		10 pontos
		50 pontos

GRUPO IV

1.		15 pontos
2.		15 pontos
3.		
	3.1.	15 pontos
	3.2.	15 pontos
		60 pontos

TOTAL .... **200 pontos**