Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 11 e 12, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. O conselho directivo de uma universidade pretende distribuir 20 computadores por 5 grupos: professores, investigadores, estudantes de licenciatura, administrativos e auxiliares.

O regulamento interno da universidade impõe que a distribuição de equipamentos por cada grupo se efectue de acordo com o método de Hamilton.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição faz-se da forma seguinte:

- calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de elementos dos grupos pelo número total de equipamentos;
- calcula-se a quota padrão para cada um dos grupos, dividindo o número de elementos de cada grupo pelo divisor padrão;
- atribui-se a cada grupo um número de equipamentos igual à parte inteira da quota padrão;
- caso ainda restem equipamentos para distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os equipamentos que restam aos grupos cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um para cada grupo);
- na atribuição do último equipamento, se houver dois grupos com quotas padrão que apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último equipamento ao grupo com menor número de equipamentos.

Na Tabela 1, estão indicados o número de elementos de cada um dos grupos e a distribuição dos 20 computadores pelos 5 grupos.

Tabela 1

Grupos	**Professores**	**Investigadores**	**Estudantes de licenciatura**	**Administrativos**	**Auxiliares**
N.º de elementos	171	55	1720	120	156
N.º de computadores	2	1	15	1	1

1.1. A associação de estudantes da universidade pretende que o grupo de estudantes de mestrado, com 210 elementos, tenha também computadores na sua sala de trabalho.

Para pôr em prática esta pretensão, o conselho directivo da universidade está a equacionar a possibilidade de alterar, de 20 para 25, o número total de computadores a distribuir. O presidente do conselho directivo afirma que:

«Um aumento do número total de computadores a serem distribuídos pode levar a que um grupo perca um computador.»

Justifique a veracidade da afirmação anterior.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hamilton, para determinar a distribuição dos 25 computadores pelos seis grupos;
- identificar as implicações, no número de computadores a serem distribuídos a cada um dos grupos, se for aprovada a alteração, de 20 para 25, do número total de computadores a distribuir.

Apresente as quotas padrão arredondadas, com três casas decimais.

1.2. A universidade foi convidada a participar num evento. Em representação da universidade, o conselho directivo decidiu enviar a esse evento dois representantes.

O presidente do conselho directivo escolheu, ao acaso, um a seguir ao outro, dois representantes da universidade de entre os indivíduos que constituem os grupos indicados na Tabela 1.

Calcule a probabilidade de os representantes escolhidos serem, ambos, estudantes de licenciatura.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

2. Numa localidade do Norte do país, todos os habitantes têm por hábito participar em jogos tradicionais, durante o fim-de-semana.

Um benemérito da região resolveu atribuir um subsídio, no valor de $€2532$, para a dinamização da prática dos jogos tradicionais.

A distribuição da verba do subsídio por cada um dos jogos foi feita de forma directamente proporcional à percentagem de habitantes da localidade inscritos nesse jogo.

As percentagens de habitantes da localidade inscritos em cada um dos jogos encontram-se registadas na Tabela 2, sendo que $12\% + 25\% + \mathrm{X} + \mathrm{Y} + 20\% = 100\%$.

Tabela 2

Jogo tradicional	**Pau**	**Malha**	**Vara**	**Péla**	**Bilros**
Percentagem de habitantes inscritos	12%	25%	X	Y	20%

2.1. Determine a verba do subsídio atribuída ao Jogo do Pau.

2.2. Determine a percentagem de habitantes inscritos no Jogo da Vara, sabendo que o valor da verba do subsídio atribuída ao Jogo da Péla foi de $€683{,}64$.

3. O António vai fazer obras em casa, o que pode demorar algumas semanas e tornar-se incómodo para a sua família. Por isso, o António decidiu procurar, no mercado de aluguer, uma casa e mudar-se.

Encontrou uma casa e ficou indeciso entre as duas modalidades de pagamento do aluguer que lhe foram propostas.

Modalidade A: o António paga de aluguer €125, na primeira semana, €145, na segunda semana, e assim sucessivamente, pagando, em cada semana, mais €20 do que pagou na semana anterior.

Modalidade B: o António paga de aluguer €5, na primeira semana, €10, na segunda semana, e, em cada uma das semanas seguintes, paga o dobro do que pagou na semana anterior.

3.1. Determine o valor de aluguer que o António paga, na quarta semana, em cada uma das modalidades.

3.2. Considere que o António está a pensar alugar a casa por 8 semanas.

Indique, justificando, a modalidade, A ou B, que permite ao António pagar menos no somatório dos valores de aluguer pagos em 8 semanas.

Na sua resposta, deve:

- indicar o valor a pagar em cada semana, na modalidade A;
- determinar o somatório dos valores de aluguer a pagar, pelo António, nas 8 semanas, na modalidade A;
- indicar o valor a pagar em cada semana, na modalidade B;
- determinar o somatório dos valores de aluguer a pagar, pelo António, nas 8 semanas, na modalidade B;
- concluir qual das duas modalidades é a mais vantajosa para o António.

3.3. O António é carteiro. Habitualmente, organiza o percurso antes de iniciar a distribuição das encomendas. Certo dia, o António decidiu fazer um grafo ponderado (Figura 1), com as distâncias a cada um dos locais de entrega das encomendas desse mesmo dia.

No grafo da Figura 1, os seis vértices representam a estação de correios (C), a escola (E), o ginásio (G), o restaurante (R), a fábrica (F) e a associação desportiva (A). Cada aresta do grafo representa um trajecto directo entre dois dos locais já referidos. A ponderação de cada aresta representa a distância, em metros, entre os locais considerados.

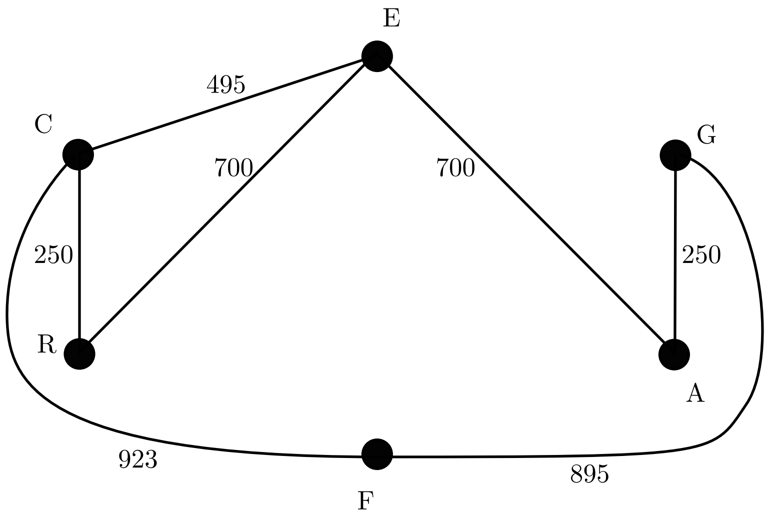


Figura 1

O António pretende partir da estação de correios, (C), passar por todos os outros locais representados, nos quais tem de entregar encomendas nesse dia, não mais do que uma vez por cada um deles, e regressar depois à estação de correios, percorrendo o número mínimo de metros.

Defina um percurso que satisfaz o que o António pretende e indique o número de metros que ele tem de percorrer.

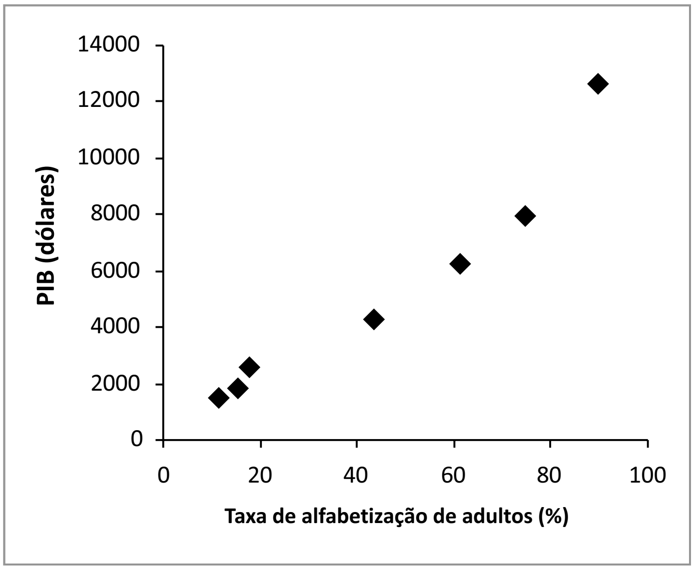
4. Um grupo de alunos está interessado em estudar o grau de desenvolvimento de sete países. As variáveis estudadas foram analisadas individualmente e através de associações entre elas.

A Tabela 3 e o Diagrama de dispersão apresentam, para os sete países, num determinado ano, duas das variáveis: a Taxa de Alfabetização de Adultos (TAA), em percentagem; e o Produto Interno Bruto *per capita* (PIB), em dólares.

Tabela 3

País	TAA (x)	PIB (y)
A	$15{,}4$	1839
B	$74{,}8$	7932
C	$43{,}5$	4251
D	$17{,}8$	2586
E	$11{,}5$	1524
F	$89{,}6$	$12\ 674$
G	$61{,}2$	6275

Diagrama de dispersão



Nos três itens seguintes, pode recorrer à calculadora. Sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

4.1. Determine a média da taxa de alfabetização de adultos, no conjunto dos sete países, tendo em conta os dados da Tabela 3.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

4.2. Admita um modelo em que a associação entre as variáveis TAA (x) e PIB (y) é, aproximadamente, linear.

Considere a equação $y = ax + b$, da recta de regressão linear, e também os dados da Tabela 3.

Indique os valores de a, de b e do coeficiente de correlação linear, r, recorrendo à calculadora.

Apresente os resultados com quatro casas decimais.

4.3. Ao analisar os dados que constam da Tabela 3, um economista reparou que o PIB do país F é de $12\ 674$ dólares e que a TAA é de $89{,}6\%$. Segundo alguns analistas, este ponto encontra-se fora do contexto dos restantes quando se pretende ajustar um modelo de regressão linear, sendo considerado um *outlier*.

A partir dos dados apresentados na Tabela 3 e no Diagrama de dispersão, ao excluir os valores relativos ao país F, o valor do coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y é, aproximadamente, $r = 0{,}9937$, e a equação da recta de regressão linear, considerando os coeficientes com quatro casas decimais, é $y = 96{,}6098\,x + 457{,}8482$.

Num pequeno texto, explique o efeito da exclusão do *outlier* no valor do coeficiente de correlação linear e na recta de regressão, quando se pretende fazer previsões.

5. Uma das classificações para o sangue humano é feita em 4 grupos distintos: A, O, B e AB.

Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o factor *Rhesus*.

Se o sangue de um indivíduo possuir esse factor, diz-se *Rhesus* positivo (Rh^{+}); se não possuir esse factor, diz-se *Rhesus* negativo (Rh^{-}).

A distribuição dos grupos sanguíneos, nas diferentes partes do mundo, é variável. A frequência destes grupos em Portugal, de acordo com um estudo recente, realizado numa população de dadores do Instituto Português do Sangue, é a que consta na Tabela 4.

Tabela 4

Factor \ Grupo	**A**	**O**	**B**	**AB**
Rh^{+}	39%	35%	7%	3%
Rh^{-}	7%	6%	2%	1%

5.1. Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo da população de dadores utilizada no estudo do Instituto Português do Sangue.

Calcule a probabilidade de o indivíduo escolhido ser do grupo O, sabendo-se que é Rh^{-}.

5.2. Num hospital, efectuou-se um estudo idêntico ao que foi realizado pelo Instituto Português do Sangue. Sabe-se que, no hospital, foram identificados os grupos sanguíneos e o respectivo factor *Rhesus*, de uma amostra aleatória de 5000 dadores. Os resultados encontrados nesse hospital são, aproximadamente, iguais aos do Instituto Português do Sangue.

Construa um intervalo de confiança de 99% para a proporção de dadores com o grupo sanguíneo O, admitindo que a proporção de dadores com este tipo de sangue, na amostra dos 5000 dadores do hospital, é a mesma que se obteve no estudo do Instituto Português do Sangue.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo, com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

1.		**30 pontos**
1.1.	20 pontos	
1.2.	10 pontos	
2.		**30 pontos**
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		**45 pontos**
3.1.	10 pontos	
3.2.	20 pontos	
3.3.	15 pontos	
4.		**55 pontos**
4.1.	15 pontos	
4.2.	20 pontos	
4.3.	20 pontos	
5.		**40 pontos**
5.1.	20 pontos	
5.2.	20 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

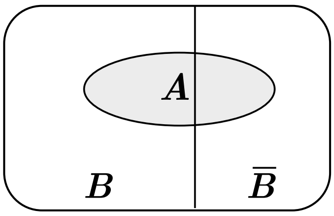
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

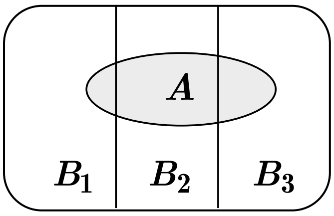
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
σ – desvio padrão da variável
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
s – desvio padrão amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\hat{p}$ – proporção amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576