GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/2.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não for pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

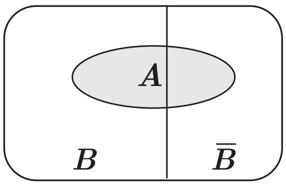
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

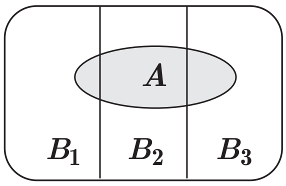
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=$$
$$=P(B)\times P(A\mid B)+P(\bar{B})\times P(A\mid \bar{B})$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)\times P(A\mid B)}{P(B)\times P(A\mid B)+P(\bar{B})\times P(A\mid \bar{B})}$$



$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)=$$
$$=P(B_1)\times P(A\mid B_1)+P(B_2)\times P(A\mid B_2)+P(B_3)\times P(A\mid B_3)$$

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(A\cap B_k)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B_k)\times P(A\mid B_k)}{P(B_1)\times P(A\mid B_1)+P(B_2)\times P(A\mid B_2)+P(B_3)\times P(A\mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. Na Nova Zelândia, o método aplicado para a conversão de votos em mandatos é o método de Saint-Laguë.

Na Tabela 1, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas de cada um dos seis partidos mais votados na eleição dos representantes de um estado neozelandês.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Partido	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Número de votos	23 023	13 245	12 345	2564	2543	2463

Na eleição, são atribuídos 10 mandatos, correspondentes ao círculo eleitoral desse estado neozelandês.

1.1. Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por $1, 3, 5, 7, 9,$ etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

A Maria, uma aluna de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, afirma que:

«Em comparação com o método de Hondt, o método de Saint-Laguë possibilita a representação dos partidos menos votados.»

Verifique se a Maria tem razão, relativamente à eleição dos representantes do estado neozelandês.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos 10 mandatos;
- aplicar o método de Saint-Laguë para determinar a distribuição dos 10 mandatos;
- concluir se a Maria tem razão, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os quocientes arredondados com uma casa decimal.

1.2. Uma comissão, formada pelos partidos menos votados, estuda a possibilidade de pedir o aumento do número de mandatos para aquele círculo eleitoral e a atribuição de mandatos pelo método de Hamilton.

Um candidato de um dos partidos que concorreram à referida eleição afirmou que:

«Se a distribuição de mandatos fosse feita pelo método de Hamilton, eu teria obtido um mandato caso fossem atribuídos 10 mandatos, mas não o teria obtido caso fossem atribuídos 12 mandatos.»

Segundo o método de Hamilton, a distribuição de mandatos faz-se da forma seguinte.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de votos dos partidos pelo número total de mandatos.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos partidos, dividindo o número de votos de cada partido pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada partido um número de mandatos igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem mandatos por distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os mandatos que restam aos partidos cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um para cada partido).
- Na atribuição do último mandato, se houver dois partidos cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último mandato ao partido com o menor número de mandatos.

Determine o partido a que pertence o candidato que fez a afirmação, supondo que a afirmação é verdadeira.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hamilton para determinar a distribuição dos 10 mandatos;
- aplicar o método de Hamilton para determinar a distribuição dos 12 mandatos;
- concluir a que partido pertence o candidato, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os valores dos quocientes arredondados com quatro casas decimais.

2. A direção da escola de Xisto pretende construir cacifos para os alunos do 10.º ano. Para concretizar esse projeto, procurou estudos sobre o valor médio das alturas dos alunos do 10.º ano e encontrou o seguinte resultado:

«É possível afirmar, com uma confiança de 95%, que o intervalo entre 160 centímetros e 178 centímetros contém o valor médio das alturas dos alunos do 10.º ano. No estudo feito, foi tida em conta uma amostra de dimensão 40 e utilizou-se como desvio padrão amostral o valor 29 centímetros.»

Com o objetivo de garantir uma maior confiança, a direção da escola de Xisto procurou encontrar um intervalo de confiança de 99% para o valor médio das alturas dos alunos do 10.º ano com base na mesma amostra.

Determine o intervalo de confiança pretendido.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os valores dos extremos do intervalo com arredondamento às unidades.

3. A associação Ajuda ao Próximo, da aldeia de Xisto, está a organizar uma recolha de sangue.

Na recolha, serão distribuídos folhetos informativos nos quais se lê:

«A recolha de sangue tem aumentado, sem quebras, desde 2006, mas ainda não é suficiente para as necessidades do país, pois, para que essas necessidades sejam asseguradas, é preciso recolher $250\,000$ *unidades de sangue por ano.»*

Em cada ano, o número de milhares de unidades de sangue recolhidas, A, em função do número de anos, t, que decorrem após o final de 2006, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = 100 \ln(4 + 0{,}49t) \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

3.1. Determine o número aproximado de milhares de unidades de sangue que serão recolhidas em 2018.

3.2. Determine o primeiro ano em que a recolha de sangue assegurará as necessidades do país.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.3. Em 2011, a associação Ajuda ao Próximo pretendia comprar um carro, mas o preço dos carros novos tinha mudado, em virtude da alteração do Imposto Sobre Veículos (ISV) ocorrida a 31 de dezembro de 2010.

A uma categoria de veículo de passageiros passaram a ser aplicadas, a partir de 2011, uma componente cilindrada (Tabela 2) e uma componente ambiental (Tabela 3).

Tabela 2
Componente cilindrada

Escalão de cilindrada (centímetros cúbicos)	Taxa por centímetros cúbicos (em euros)	Parcela a abater (em euros)
Até 1250	0,92	684,74
Mais de 1250	4,34	4 964,37

Tabela 3
Componente ambiental

Escalão de CO_2 (em gramas por quilómetro)	Taxas (em euros)	Parcela a abater (em euros)
Veículos a gasolina:		
Até 115	3,57	335,58
De 116 a 145	32,61	3 682,79
De 146 a 175	37,85	4 439,31
De 176 a 195	96,20	14 662,70
Mais de 195	127,03	20 661,74
Veículos a gasóleo:		
Até 95	17,18	1 364,58
De 96 a 120	49,16	4 450,15
De 121 a 140	109,02	11 734,52
De 141 a 160	121,24	13 490,65
Mais de 160	166,53	20 761,61

Apresenta-se a seguir um exemplo da aplicação da Tabela 3.

Para obter o valor a pagar pelas emissões de CO_2 de um veículo a gasolina com $197\,g/km$ de emissão de CO_2, procede-se do seguinte modo:

- cálculo: $197 \times 127{,}03 - 20\,661{,}74$
- imposto a pagar pelas emissões de CO_2: $4363{,}17$ euros

A aplicação da Tabela 2 é feita de modo semelhante.

Determine a diferença entre o preço de venda ao público em 2011 e o preço de venda ao público em 2010 de um veículo de passageiros a gasóleo, com $1598\,cc$ de cilindrada e $119\,g/km$ de emissão de CO_2, cujo preço base é $18\,014{,}40$ euros.

Comece por completar a Tabela 4, para obter uma simulação dos preços de venda ao público em 2010 e em 2011.

Tabela 4

		Em 2010	**Em 2011**
Preço base do veículo (1) (em euros)		18 014,40	18 014,40
Imposto sobre cilindrada do veículo (2) (em euros)	1598 cc	1934	
Imposto sobre emissões CO_2 Combustível: gasóleo (3) (em euros)	119g/km	1372	
Total ISV: (4) = (2) + (3)			
Soma (1) + (4)			
Taxa de IVA a aplicar sobre a soma		21%	23%
Total de IVA (5)			
Preço de venda ao público (1) + (4) + (5) (em euros)			

Reproduza a tabela na folha de respostas e apresente todos os cálculos efetuados.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. O professor da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais da escola de Xisto estudou a existência de uma correlação linear entre as classificações dos alunos na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI) e as classificações desses mesmos alunos no exame nacional da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (CE).

Os dados recolhidos encontram-se organizados na Tabela 5.

Tabela 5

N.º do Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
(CI) x	9	9	10	13	14	9	11	11	14	8	14	16	16	19	14	11	16	10
(CE) y	7	8,2	9,5	12,1	13,7	7,5	14,2	10,6	14,5	6,3	12,1	17,2	14,8	4,2	11,7	9,5	15,2	8,5

4.1. A análise do diagrama de barras dos dados obtidos para a variável estatística «classificação dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI)» fornece informação relevante sobre a dispersão e a representatividade da média da amostra das classificações naquela disciplina.

Descreva essa informação.

Na sua resposta, deve:

- representar os dados da variável estatística «classificação dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI)» num diagrama de barras;
- determinar o valor da média da variável estatística «classificação dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI)»;
- relacionar a representação gráfica dos dados com o valor da média.

Apresente o valor da média com arredondamento às décimas.

4.2. Uma aluna, após calcular o coeficiente de correlação dos dados organizados na Tabela 5, afirma:

«A correlação linear entre as classificações dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI) e as classificações obtidas no exame (CE) é fraca. No entanto, se excluirmos as classificações do aluno número 14, essa correlação linear aumenta substancialmente.»

Justifique a veracidade da afirmação da aluna.

Na sua resposta, deve:

- determinar o coeficiente de correlação linear incluindo as classificações do aluno número 14;
- determinar o coeficiente de correlação linear excluindo as classificações do aluno número 14;
- relacionar os valores dos dois coeficientes, justificando a veracidade da afirmação da aluna.

Apresente os coeficientes de correlação com arredondamento às milésimas.

4.3. Admita que a reta de regressão $y = 1{,}0927x - 1{,}8476$, no intervalo $[8, 18]$, se ajusta, aproximadamente, aos pontos do diagrama de dispersão das variáveis:

x: *«classificação dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no final do 3.º período de 2010 (CI)»*

y: *«classificação dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais no exame nacional de 2010 (CE)»*

Calcule a estimativa do valor da classificação no exame da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais de um aluno da escola de Xisto que, no final do 3.º período de 2010, tenha obtido a classificação de 12.

Apresente o resultado com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4.4. Admita que as classificações de exame dos alunos na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais em 2011 seguem, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio igual a 10 valores e desvio padrão igual a $4{,}1$ valores.

Note que:

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68{,}27\%$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\%$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\%$

Determine um valor aproximado para a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter uma classificação no exame da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais entre os $14{,}1$ valores e os $18{,}2$ valores.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5. Na aldeia de Xisto, vai realizar-se uma minimaratona.

Na Figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo ao percurso da minimaratona.

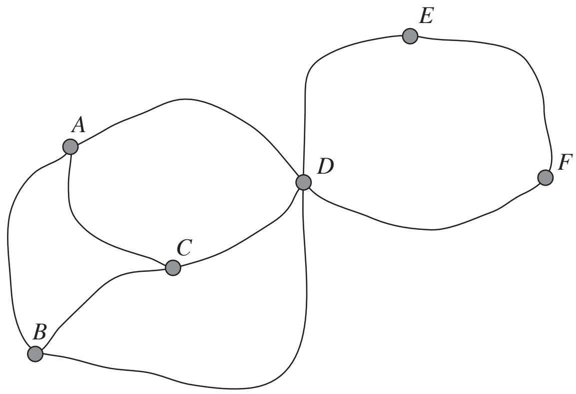


Figura 1

No grafo, o vértice B representa o ponto de partida e de chegada, e os vértices A, C, D, E e F representam postos de distribuição de água.

Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois postos de distribuição de água ou um posto de distribuição de água ao ponto de partida.

5.1. Os organizadores da corrida decidiram que todos os participantes tinham de passar por todos os trajetos diretos, sem repetirem nenhum.

O Carlos, um dos organizadores da corrida, observou o grafo e afirmou:

«É impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum. Para garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos, é necessário admitir duplicações de trajetos diretos já existentes.»

Justifique a veracidade da afirmação, e apresente no grafo um par de duplicações de trajetos diretos que permita garantir que os participantes passam por todos os trajetos diretos.

Reproduza o grafo modificado na sua folha de respostas.

5.2. Admita que a probabilidade de um atleta, escolhido ao acaso, beber água no posto D, sabendo-se que esse atleta bebeu água no posto A, é $\frac{9}{10}$ e que a probabilidade de esse atleta ter bebido água nos dois postos é $\frac{3}{5}$.

Determine a probabilidade de um atleta, escolhido ao acaso, ter bebido água no posto A.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.	15 pontos	
		15 pontos
3.		
3.1.	10 pontos	
3.2.	15 pontos	
3.3.	15 pontos	
		40 pontos
4.		
4.1.	20 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.3.	15 pontos	
4.4.	20 pontos	
		70 pontos
5.		
5.1.	20 pontos	
5.2.	15 pontos	
		35 pontos
TOTAL		**200 pontos**