Associação de Professores de Matemática

Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt

email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS (PROVA 835) 2013 – 1ªFASE

Grupo I

1.

1.1. De acordo com o método apresentado, a contagem de pontos de cada tema, incluindo o tema "Festas" é dado por:

- *Bullying*: $415\times 3+370\times 1+200\times 2=2015$ pontos
- Solidariedade: $415\times 2+370\times 3+200\times 1=2140$ pontos
- Festas: $415\times 1+370\times 2+200\times 3=1755$ pontos

Se o tema "Festas" for excluído, a contagem de pontos para os restantes dois temas é dado por:

- *Bullying*: $415\times 2+370\times 1+200\times 2=1600$ pontos
- Solidariedade: $415\times 1+370\times 2+200\times 1=1355$ pontos

Desta forma, se o tema "Festas" for incluído, o tema escolhido será "Solidariedade", e se o tema "Festas" for excluído o tema escolhido será "*Bullying*", pelo que não se mantém a escolha do tema nos dois casos.

1.2. A distribuição do número de lugares é apresentado na tabela seguinte:

Ano de escolaridade	**10º**	**11º**	**12º**
Número de alunos	140	120	160
Total	$140+120+160=420$		
Divisor padrão	$420 \div 20 = 21$		
Quota padrão	6,667	5,714	7,619
Quota arredondada	6+1=7	5+1=6	7+1=8
Soma das quotas arredondadas	7+6+8=21		

Uma vez que o total das quotas arredondadas é diferente do número de lugares a distribuir, há que encontrar um divisor modificado para substituir o divisor padrão.

Verifica-se que para um divisor modificado igual a 21,4 se tem:

Ano de escolaridade	**10º**	**11º**	**12º**
Número de alunos	140	120	160
Divisor modificado	21,4		
Quota modificada	6,542	5,607	7,477
Quota modificada arredondada	6+1=7	5+1=6	7
Soma das quotas modificadas arredondadas	7+6+7=20		

Assim a distribuição dos 20 lugares da comissão deverá ser de 7 lugares para os 10º e 12º anos e de 6 lugares para o 11º ano.

2.

2.1. De acordo com a expressão dada, $C_n = C + C \times n \times i$, e pelos dados do enunciado temos que

$C_n = 1680$

$C = 1500$

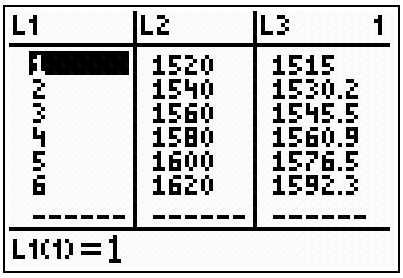
$n = 2$, porque em seis meses existem dois trimestres e a capitalização é trimestral

Para determinar a taxa de juro trimestral (i) substituímos estes valores na expressão dada:

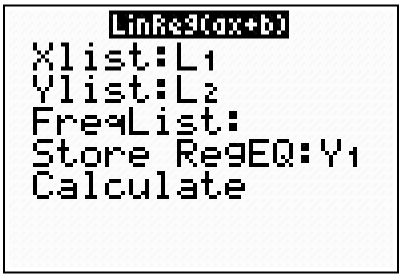
$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 180 = 3000 \times i \Leftrightarrow \frac{180}{3000} = i \Leftrightarrow 0,06 = i$$

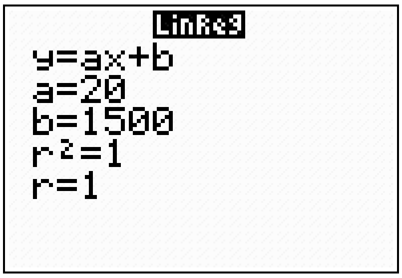
Pelo que a instituição PIPA propõe uma taxa de juro trimestral de 6%.

2.2. Inserindo os dados da tabela nas tabelas da máquina, obtemos:



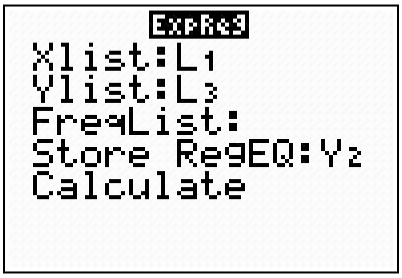
Analisando a variação dos montantes da conta X, podemos verificar que a variação é constante, pelo que uma correlação linear, ajusta-se a estes dados.

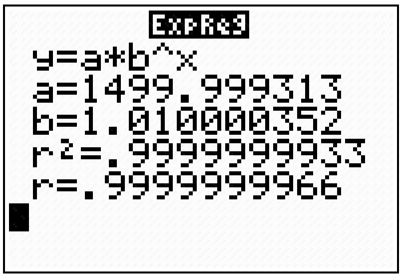




Obtendo-se a partir da regressão linear da calculadora o modelo $y = 20x + 1500$ para a conta X.

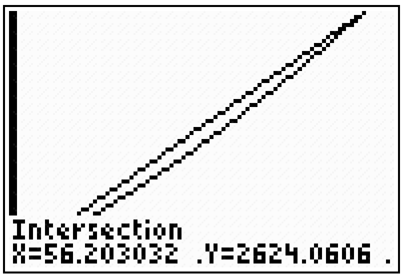
Relativamente aos dados da conta Y, o aumento não é constante, mas o capital no final de cada mês é 1,01 vezes maior que o do final do mês anterior (por outras palavras, verifica-se um aumento de 1% em relação ao mês anterior), o que indica um modelo exponencial .





Recorrendo a uma regressão exponencial na calculadora, obtém-se o modelo $y = 1500 \times 1{,}01^x$ para a conta Y.

Recorrendo à representação gráfica dos dois modelos, para valores de x entre 0 e 60, e de y entre 1500 e 2620, e determinando o ponto de intersecção dos dois gráficos:



Podemos observar que no final do 56º mês o montante da conta Y ainda não era superior ao montante da conta X, e que no final do 57º mês, esta situação já seria verificada, pelo que a Carla tem razão.

2.3.

2.3.1. De acordo com o modelo dado, temos que $x=10$, pelo que, substituindo na expressão do modelo vem $N(10)=\frac{30}{1+16\times e^{-1,15x}}\approx 30$

Pelo que o número de aplicações feitas é de aproximadamente 30.

2.3.2. Consideremos os acontecimentos:

3M – A aplicação escolhida é a de 3 meses;

6M – A aplicação escolhida é a de 6 meses.

R – A aplicação deu rendimento

$\bar{R}$ - a aplicação não deu rendimento

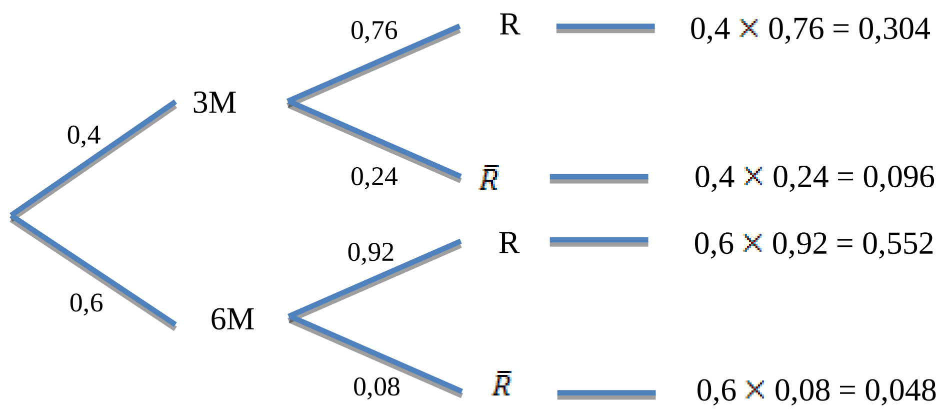
O número de aplicações feitas por um período de capitalização igual a 3 meses é dado por $N(3)\approx 20$, e a 6 meses por $N(6)\approx 30$

Deste modo:

$P(3M)=\frac{20}{50}\approx 0{,}4$, sendo 50 o número total de aplicações feitas nesse dia

$P(6M)=\frac{30}{50}\approx 0{,}6$

Consideremos o seguinte diagrama:

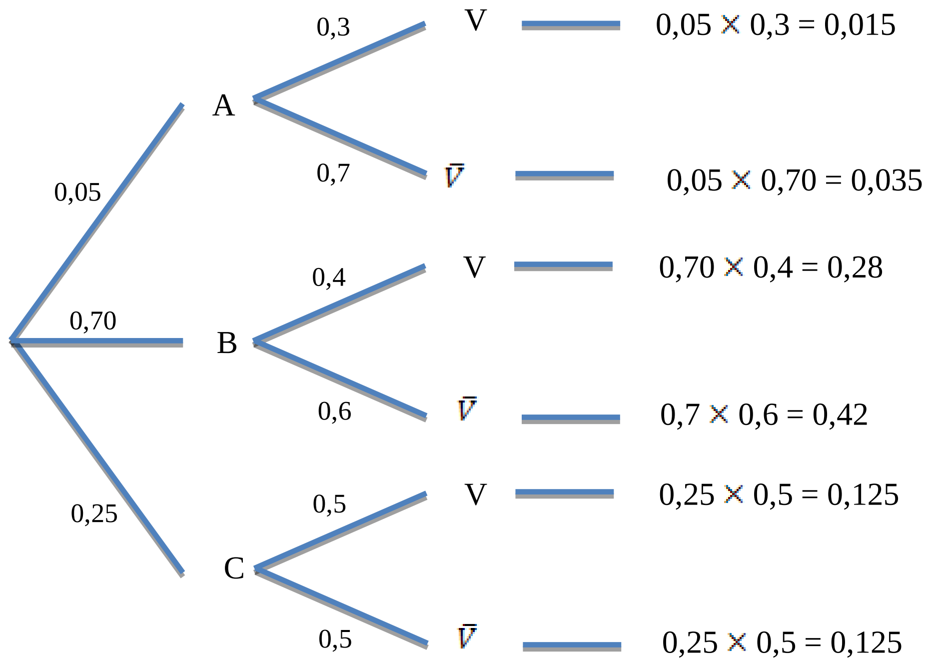


Assim

$$P(3M|R)=\frac{0{,}304}{0{,}304+0{,}552}=\frac{38}{107}$$

3.

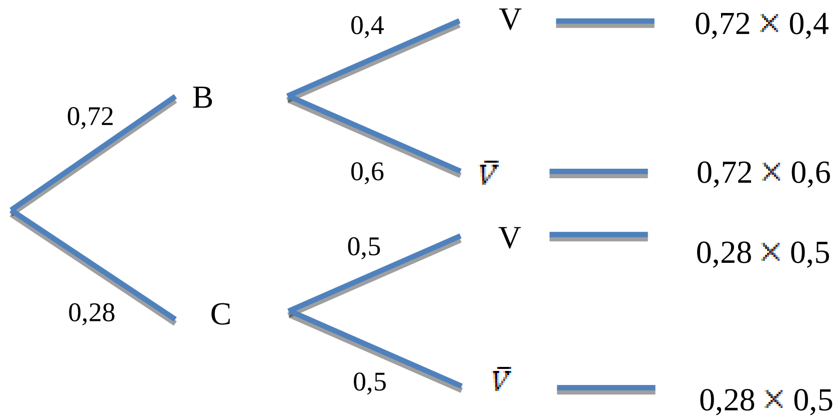
3.1. A partir do seguinte diagrama



Podemos agora preencher a tabela:

Acontecimentos	A	B	C	Total
V	0.015	0.28	0.125	0.42
$\overline{V}$	0.035	0.42	0.125	0.58
Total	0.05	0.7	0.25	1

3.2. Recorrendo a um novo diagrama



A probabilidade do André vencer uma partida é dada pelo valor da expressão:

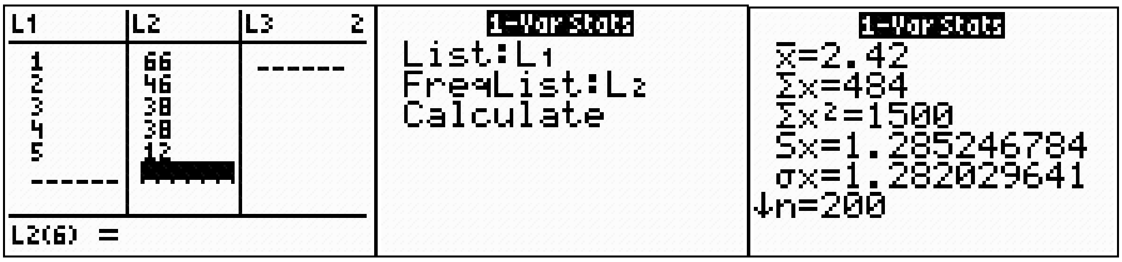
0,72 × 0,4+0,28 × 0,5 = 0,428

4.

4.1. Usando os dados fornecidos temos a tabela seguinte:

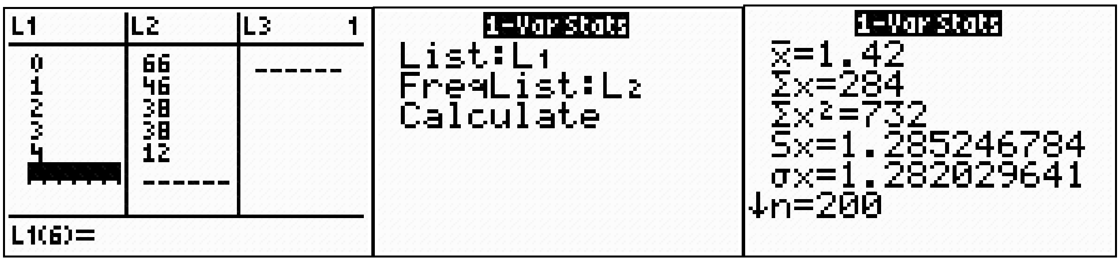
Número de filhos	Frequência absoluta acumulada	Frequência absoluta simples	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
1	78	78	$78 \div 200 = 0,39$	0,39
2	166	$166 - 78 = 88$	$88 \div 200 = 0,44$	$0,39 + 0,44 = 0,83$
3	184	$184 - 166 = 18$	$18 \div 200 = 0,09$	$0,83 + 0,09 = 0,92$
4	196	$196 - 184 = 12$	$12 \div 200 = 0,06$	$0,92 + 0,06 = 0,98$
5	200	$200 - 196 = 4$	$4 \div 200 = 0,02$	$0,98 + 0,02 = 1$
Total		200	1	

4.2. Inserindo os dados em listas (L1 e L2 no exemplo) e usando as capacidades da calculadora gráfica



Obtivemos os valores de 2,42 para a média e de 1,3 para o desvio padrão, a partir dos dados da tabela inicial.

Alterando os dados da primeira lista e refazendo os procedimentos anteriores.



obtivemos os valores de 1,42 para a média e de 1,3 para o desvio padrão.

Como seria de esperar, uma vez que todas as observações foram reduzidas em 1 unidade, a média foi reduzida em 1 unidade, e o desvio padrão permanece sem alterações, uma vez que as diferenças em relação à média são exactamente iguais nas duas situações.

4.3. Sabe-se que I =]0,34958; 0,53042[= $\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}\right[$

Amplitude de I = 0,18084 = $2 \times z\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}$

Onde

$\hat{p} = \frac{38+38+12}{200} = 0{,}44$

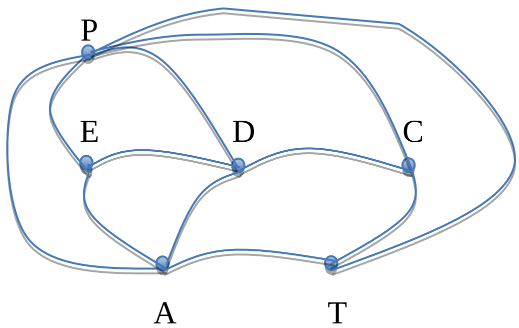
n=200

Assim

$$2z\sqrt{\frac{0{,}44 \times 0{,}56}{200}} = 0{,}18084 \Leftrightarrow z \approx 2{,}576$$

Valor de z que corresponde a um nível de confiança de 99%

5. Um possível grafo que modele a situação é o seguinte, onde os vérices representam cada um dos espaços do recinto e as arestas, o percurso que vai de um espaço a outro passando por uma porta



P- pátio

E- exposição

D- espaço de debate

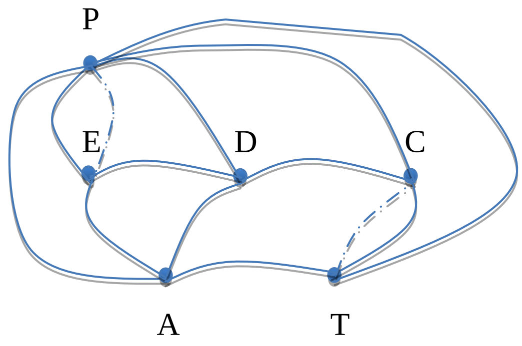
C- cantina

A - auditório

T- teatro

Para que seja possível efectuar uma ronda ao recinto, passando por todas as portas uma única vez, começando e terminando o trajecto na cantina, teria que existir pelo menos um circuito de Euler no grafo que representa a situação. Pelo Teorema de Euler, e dado que o grafo é conexo, todos os vértices teriam que ter grau par, o que não acontece.

Assim, a solução para efectuar uma ronda percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes por cada uma, passa por duplicar o número mínimo de arestas de forma a que todos os vértices passem a ter grau par. Tal é possível duplicando as arestas PE e TC (a tracejado na figura a seguir)



P- pátio

E- exposição

D- espaço de debate

C- cantina

A - auditório

T- teatro

Uma solução possível para a situação colocada seria a ronda:
C T A P E D C P E A D P T C

FIM