TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 12º ANO

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $3 \times 4! = 3 \times 24 = 72$

Resposta **B**

2. $\dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n} + \dfrac{5}{n} = 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{12}{n} = 1 \;\Leftrightarrow\; n = 12$

Resposta **C**

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\ln(x)}{x} - f(x) \right] = 0 - 1 = -1$

Resposta **A**

4. Como $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, as opções B e C ficam excluídas.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - x] = 0$, tem-se que a recta de equação

$y = x$ é assimptota do gráfico de g.

Resposta **D**

5. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, ela é contínua, em particular, em $x = a$.
Portanto, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Daqui vem:

$a^2 - 2a = a^2 - a + 3 \;\Leftrightarrow\; -2a + a = 3 \;\Leftrightarrow\; a = -3$

Resposta **A**

Grupo II

1.1. $P(B|\overline{A})$ designa a probabilidade de o número da segunda bola retirada ser par, sabendo que o número da primeira bola retirada é ímpar.
Inicialmente, existem seis bolas com número ímpar e cinco com número par.
Após a primeira extracção, ficam dez bolas na caixa, das quais cinco têm número par.
Portanto, $P(B|\overline{A}) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

1.2. Para o produto de três números ser ímpar, os números têm de ser todos ímpares.
De 1 a 11 existem seis números ímpares.

Portanto, a probabilidade pedida é: $\dfrac{{}^{6}C_3}{{}^{11}C_3} \approx 0{,}12$

2. Comecemos por observar que, em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo.
Portanto, para que a expressão $\log_2(x-1)+\log_2(13-x)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $x-1>0 \ \wedge \ 13-x>0$

Tem-se: $x-1>0 \ \wedge \ 13-x>0 \ \Leftrightarrow \ x>1 \ \wedge \ x<13 \ \Leftrightarrow \ x\in\,]1,13[$

Neste intervalo, tem-se: $\log_2(x-1)+\log_2(13-x)\le 5 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \log_2[(x-1)(13-x)]\le 5 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(13-x)\le 2^5 \ \Leftrightarrow$

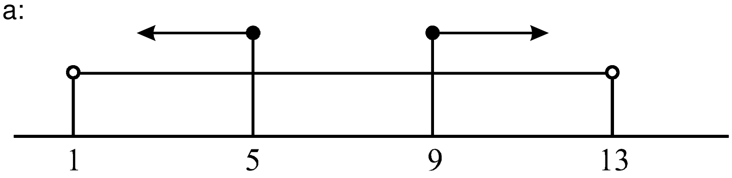
$\Leftrightarrow \ 13x - x^2 - 13 + x \le 32 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 14x + 45 \ge 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x\le 5 \ \vee \ x\ge 9$

Cálculo auxiliar:
$x^2 - 14x + 45 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{14\pm\sqrt{14^2-4\times1\times45}}{2}$
$\Leftrightarrow \ x=5 \ \vee \ x=9$

O conjunto solução da inequação é, portanto, o conjunto dos números reais que satisfazem a condição: $x\in\,]1,13[\ \wedge \ (x\le 5 \ \vee \ x\ge 9)$

Podemos fazer um esquema:



Tem-se, assim, que o conjunto solução da inequação é: $]1,5]\ \cup\ [9,13[$

3.1. Tem-se, de acordo com o enunciado:

- a massa de *carbono-14*, mil anos após o instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de *carbono-14*, dois mil anos após o instante inicial, era de 2,58 g

Portanto, $m(1)=2{,}91$ e $m(2)=2{,}58$ ou seja $\begin{cases} a\,e^{2b}=2{,}58 \\ a\,e^{b}=2{,}91 \end{cases}$

Donde: $\frac{a\,e^{2b}}{a\,e^{b}}=\frac{2{,}58}{2{,}91} \ \Leftrightarrow \ e^b=\frac{2{,}58}{2{,}91} \ \Leftrightarrow \ b=\ln\left(\frac{2{,}58}{2{,}91}\right)$

Portanto, $b\approx -0{,}12$

Por outro lado, como $a\,e^b=2{,}91$ e como $e^b=\frac{2{,}58}{2{,}91}$, vem:
$a\times\frac{2{,}58}{2{,}91}=2{,}91 \ \Leftrightarrow \ a=\frac{2{,}91^2}{2{,}58}$ Portanto, $a\approx 3{,}28$

Assim, no instante inicial, a massa de *carbono-14* que existia no fóssil era de 3,28 g

3.2. Tem-se

$$\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)} = \frac{a\,e^{-0{,}43\,(t+1{,}6)}}{a\,e^{-0{,}43\,t}} = \frac{e^{-0{,}43\,t\,-\,0{,}688}}{e^{-0{,}43\,t}} =$$

$$= e^{-0{,}43\,t-0{,}688+0{,}43\,t} = e^{-0{,}688} \approx 0{,}5$$

Concluímos assim que $\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)} \approx 0{,}5$ o que significa que, durante o processo de desintegração do *rádio-226*, a sua massa diminui para metade, sempre que passam 1600 anos.

4.1. Assimptotas verticais:

Uma vez que a função f é contínua para $x<1$ e para $x>1$, apenas a recta de equação $x=1$ poderá ser assimptota vertical do gráfico de f.

Dos dois limites laterais em $x=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, apenas o primeiro pode ser infinito, uma vez que f é contínua em $[1, +\infty[$

Calculemos, então, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\,x^2-3}{x^2\,-2x+1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\,(x^2-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{3\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\,(x+1)}{x-1} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Portanto, a recta de equação $x=1$ é assimptota do gráfico de f

Assimptotas horizontais:

Tem-se:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3\,x^2-3}{x^2\,-2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3\,x^2}{x^2} = 3$$

Portanto, a recta de equação $y=3$ é assimptota do gráfico de f

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left[\ln(x) - e^{1-x}\right] = +\infty - 0 = +\infty$$

Portanto, o gráfico de f não tem outra assimptota horizontal.

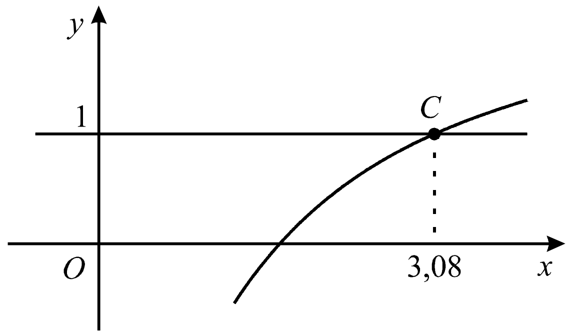
4.2. A área do rectângulo $[ABCD]$ é igual a $\overline{AB} \times \overline{AD}$

Tem-se:

$$\overline{AB} = f(-2) = \frac{3 \times (-2)^2 - 3}{(-2)^2 - 2\times(-2) + 1} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = 2 + \overline{OD}$$

$\overline{OD}$ é igual à abcissa do ponto C, ponto de intersecção da recta de equação $y = 1$ com a curva de equação $y = \ln(x) - e^{1-x}$



Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, verifica-se que a abcissa do ponto C é aproximadamente igual a $3{,}08$

Portanto, tem-se:

Área do rectângulo $[ABCD] = \overline{AB} \times \overline{AD} = 1 \times 5{,}08 = 5{,}08$

5. Como a função f é contínua em $[1, 2]$, a função g, por ser a diferença entre duas funções contínuas, também é contínua em $[1, 2]$

Tem-se:

- $g(1) = 2\,f(1) - f(1) = f(1)$
  Como $\forall\, x \in [1, 2],\ f(x) < 0,$ tem-se $f(1) < 0$ pelo que $g(1) < 0$

- $g(2) = 2\,f(2) - f(1) = 2\,f(2) - 3f(2) = -f(2)$
  Como $\forall\, x \in [1, 2],\ f(x) < 0,$ tem-se $f(2) < 0$ pelo que $g(2) > 0$

Como a função g é contínua em $[1, 2]$ e como se tem $g(1) < 0$ e $g(2) > 0$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que a função g tem pelo menos um zero.