

Teste Intermédio

## Matemática A

**Versão 1**

Duração do Teste: 90 minutos | 19.05.2010

**12.º Ano de Escolaridade**

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### COTAÇÕES

**GRUPO I** ..... (5 × 10 pontos) ..... **50 pontos**

**GRUPO II** ..... **150 pontos**

1. .... 15 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 60 pontos

3.1. .... 20 pontos

3.2. .... 20 pontos

3.3. .... 20 pontos

4. .... 55 pontos

4.1. .... 20 pontos

4.2. .... 20 pontos

4.3. .... 15 pontos

**TOTAL** ..... **200 pontos**

**A classificação do teste deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.**

## **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente a que item diz respeito.

Se o aluno responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão do teste (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

Nos itens de escolha múltipla, a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem, de forma inequívoca, a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma opção incorrecta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tipos em consideração.

Nos itens de resposta aberta, com cotação igual ou superior a quinze pontos que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

<b>Níveis</b>	<b>Descritores</b>
<b>3</b>	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>2</b>	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>1</b>	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente:

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtrai eventualmente um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ponto, de acordo com o previsto na situação 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	<p>A etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros».]	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se as correcções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>- nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

### GRUPO I

1. a 5. .... (5 × 10 pontos) ..... 50 pontos

As respostas correctas são as seguintes:

Ítems	1	2	3	4	5
Respostas	D	C	A	D	C

### GRUPO II

1. .... 15 pontos

Efectuar o produto de  $1 + 2i$  por  $3 + i$  ..... 3 pontos

Concluir que  $i^6 = -1$  ..... 3 pontos

Concluir que  $i^7 = -i$  ..... 3 pontos

Simplificar o numerador ..... 1 ponto

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fracção  
por um factor conveniente (por exemplo,  $i$  ou  $-i$ ) ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

Escrever o resultado na forma pedida ..... 1 ponto

2. .... 20 pontos

A resolução deste item envolve a utilização das seguintes propriedades:

- leis de De Morgan;
- relação da probabilidade de um acontecimento com a do seu contrário;
- relação da probabilidade condicionada com a probabilidade da intersecção;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos.

A classificação deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O aluno utiliza correctamente as quatro propriedades e  
prova o pretendido ..... 20 pontos

O aluno utiliza correctamente as quatro propriedades, mas  
não prova o pretendido ..... 16 pontos

O aluno utiliza correctamente apenas três propriedades ..... 12 pontos

O aluno utiliza correctamente apenas duas propriedades ..... 8 pontos

O aluno utiliza correctamente apenas uma propriedade ..... 4 pontos

3.1. .... 20 pontos

Referir que, como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , o seu gráfico não tem assíntotas verticais ..... 2 pontos

Estudar a existência de assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  (ver nota 1) ..... 10 pontos

Escrever uma equação da assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 1 ponto

Estudar a existência de assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  (ver nota 2) ..... 6 pontos

Concluir que não existe assíntota do gráfico da função  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 1 ponto

**Notas:**

1. O aluno pode começar por calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  e, em seguida, calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , ou pode calcular apenas  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

No primeiro caso, os 10 pontos relativos a esta etapa devem ser repartidos da seguinte forma:

Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Decompor  $\frac{f(x)}{x}$  na soma de duas fracções ..... 1 ponto

Referir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  ..... 1 ponto

Escrever  $x e^{-x}$  na forma  $\frac{x}{e^x}$  ..... 2 pontos

Referir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ..... 1 ponto

Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Escrever  $x^2 e^{-x}$  na forma  $\frac{x^2}{e^x}$  ..... 2 pontos

Referir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  ..... 1 ponto

No segundo caso, os 10 pontos relativos a esta etapa devem ser repartidos da seguinte forma:

Escrever  $x^2 e^{-x}$  na forma  $\frac{x^2}{e^x}$  ..... 4 pontos

Referir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$  ..... 2 pontos

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  ..... 4 pontos

2. O aluno pode começar por calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e, em seguida, calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , ou pode começar por calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

No primeiro caso, os 6 pontos relativos a esta etapa devem ser repartidos da seguinte forma:

Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x}) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ..... 1 ponto

Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

Decompor  $\frac{f(x)}{x}$  na soma de duas fracções ..... 1 ponto

Referir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$  ..... 1 ponto

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x e^{-x}) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ..... 1 ponto

No segundo caso, os 6 pontos relativos a esta etapa devem ser repartidos da seguinte forma:

Decompor  $\frac{f(x)}{x}$  na soma de duas fracções ..... 1 ponto

Referir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$  ..... 1 ponto

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x e^{-x}) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$  ..... 2 pontos

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ..... 2 pontos

**3.2. .... 20 pontos**

Determinar  $f'(x)$  (ver nota 1) ..... 7 pontos

$(4x^2 e^{-x})' = (4x^2)'e^{-x} + 4x^2(e^{-x})'$  ..... 3 pontos

Derivar  $4x^2$  ..... 1 ponto

Derivar  $e^{-x}$  ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 1 ponto

Determinar os zeros de  $f'$  ..... 5 pontos

Escrever a equação  $f'(x) = 0$  ..... 1 ponto

Aplicar a lei do anulamento do produto ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

Apresentar o estudo da função  $f$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos (ver nota 2) ..... 6 pontos

Determinar o mínimo (imagem de 0) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se existir evidência de que o aluno pretende determinar a expressão da derivada da função, a classificação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2. Se o aluno apresentar o estudo através de um quadro, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Primeira linha do quadro (relativa à variável  $x$ ) ..... 2 pontos

Segunda linha do quadro (relativa ao sinal de  $f'$ ) ..... 2 pontos

Terceira linha do quadro (relativa à monotonia e à existência de extremos de  $f$ ) ..... 2 pontos

3.3. .... 20 pontos

Escrever a equação  $g(x) = 0$  ..... 1 ponto

Obter a equação  $x + \ln(4x^2 e^{-x}) = 0$  ..... 1 ponto

Resolver a equação  $x + \ln(4x^2 e^{-x}) = 0$  ..... 18 pontos

Aplicar a propriedade relativa ao logaritmo  
de um produto ..... 5 pontos

Utilizar a igualdade  $\ln(e^{-x}) = -x$  ..... 5 pontos

Obter a equação  $4x^2 = 1$  (ver nota) ..... 4 pontos

Obter as soluções da equação (ver nota) ... (2+2) ..... 4 pontos

ou

Isolar  $\ln(4x^2 e^{-x})$  num dos membros ..... 1 ponto

Obter a equação  $4x^2 e^{-x} = e^{-x}$  ..... 7 pontos

Obter a equação  $4x^2 = 1$  ..... 6 pontos

Obter as soluções da equação ..... (2+2) ..... 4 pontos

**Nota:**

Se o aluno substituir  $\ln(4x^2)$  por  $2\ln(2x)$  ou  $\ln(x^2)$  por  $2\ln(x)$ , a classificação máxima a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

4.1. .... 20 pontos

Escrever a igualdade  $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PB}}{5}$  ..... 3 pontos

Concluir que  $\overline{PB} = 5 \operatorname{tg} x$  ..... 2 pontos

Concluir que  $\overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$  ..... 3 pontos

Escrever a igualdade  $\cos x = \frac{5}{\overline{AP}}$  ..... 3 pontos

Concluir que  $\overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$  ..... 3 pontos

Escrever a igualdade  $\overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2$  ..... 4 pontos

Concluir que  $\overline{AC} = \sqrt{50}$  ..... 1 ponto

Concluir que  $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$  ..... 1 ponto

4.2. .... 20 pontos

Determinar  $f'(x)$  (ver nota) ..... 10 pontos

Derivar  $\frac{5}{\cos x}$  ..... 5 pontos

Derivar  $5 \operatorname{tg} x$  ..... 3 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

Determinar  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$  ..... 8 pontos

Substituir, na expressão de  $f'$ ,  $x$  por  $\frac{\pi}{6}$  ..... 1 ponto

Substituir  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$  por  $\frac{1}{2}$  ..... 2 pontos

Substituir  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$  por  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 3 pontos

Identificar o declive da recta  $r$  com  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos

**Nota:**

Se existir evidência de que o aluno pretende determinar a expressão da derivada da função, a classificação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

**4.3. .... 15 pontos**

- Apresentar os gráficos visualizados na calculadora ..... 7 pontos
- Gráfico da função  $f$  (ver **nota 1**) ..... 5 pontos
- Recta de equação  $y = 16$  ..... 2 pontos
- Assinalar o ponto de intersecção ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (ver **notas 2 e 3**) ..... 6 pontos

**Notas:**

1. Se o gráfico apresentado não respeitar o domínio da função, a classificação máxima a atribuir a esta etapa é 4 pontos.
2. O valor apresentado deve ser classificado de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do valor com duas casas decimais)

- 0,24 ..... 6 pontos
- 0,23 ou 0,25 ..... 4 pontos
- 0,22 ou 0,26 ..... 2 pontos
- 0,21 ou 0,27 ..... 1 ponto
- Outros valores ..... 0 pontos

2.º Caso (apresentação do valor com mais de duas casas decimais)

- Valor pertencente ao intervalo  $[0,236 ; 0,241]$  ..... 4 pontos
- Valor fora do intervalo anterior, mas no intervalo  $[0,226 ; 0,251]$  . 2 pontos
- Valor fora do intervalo anterior, mas no intervalo  $[0,206 ; 0,271]$  ... 1 ponto
- Outros valores ..... 0 pontos

3.º Caso (apresentação do valor com uma casa decimal)

- 0,2 ..... 1 ponto
- Outros valores ..... 0 pontos

4.º Caso (apresentação do valor arredondado às unidades)

- Qualquer valor ..... 0 pontos

3. Caso o aluno não explicitar o valor pedido, limitando-se, por exemplo, a apresentar as coordenadas do ponto de intersecção, deverão ser subtraídos 2 pontos à classificação atribuída a esta etapa, após a aplicação do critério apresentado na nota 2. Caso a classificação obtida seja um número negativo, a classificação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.