

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 26.05.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	20 pontos
2.3.	20 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	20 pontos
4.	15 pontos
5.	20 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL **200 pontos**

A classificação do teste deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o aluno responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorrecta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os alunos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação dos testes intermédios, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 5. (5 × 10 pontos)..... **50 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5
Respostas	D	B	D	C	B

GRUPO II

1. **20 pontos**

Dividir $z^3 - z^2 + 4z - 4$ por $z - 1$ 5 pontos

Resolver a equação $z^2 + 4 = 0$ (4 + 4)..... 8 pontos

Representar no plano complexo as imagens geométricas das três soluções 3 pontos

Calcular o perímetro do triângulo (**ver nota**)..... 4 pontos

Nota – Caso o aluno calcule o perímetro do triângulo, a etapa anterior, ainda que não explicitamente apresentada, deve ser considerada como cumprida.

2.1. **20 pontos**

Referir que a função f é contínua em $x = 1$ se existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e se esse limite for igual a $f(1)$ (**ver nota**) 2 pontos

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 10 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 + \frac{\text{sen}(x-1)}{e^x - e} \right)$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 + \frac{\text{sen}(x-1)}{e^x - e} \right) = 2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{e^x - e}$ 1 ponto

Escrever $2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{e^x - e} = 2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{e(x-1)}$ 2 pontos

Escrever $2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{e(x-1)} = 2 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}$ 2 pontos

Escrever $2 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = 2 + \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}$

OU

Escrever $2 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = 2 + \frac{1}{e} \lim_{(x-1) \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \dots$ 1 ponto

Concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + \frac{1}{e}$ 3 pontos

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 5 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x e^{-x} + 2x)$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x e^{-x} + 2x) = e^{-1} + 2$ 3 pontos

Concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x e^{-x} + 2x) = \frac{1}{e} + 2$ 1 ponto

Referir que $f(1) = \frac{1}{e} + 2$ 2 pontos

Concluir sobre a continuidade da função em $x = 1$ 1 ponto

Nota – Caso o aluno não explicita esta etapa mas evidencie que a considerou na sua resposta, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2.2. **20 pontos**

Escrever $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1 ponto

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 8 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + 2x}{x}$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2)$ 3 pontos

Concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$ 3 pontos

Concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ 1 ponto

Escrever $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ 1 ponto

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ 8 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x} + 2x - 2x)$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ 3 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}$ 1 ponto

Concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ 2 pontos

Escrever a equação reduzida da assíptota 2 pontos

2.3. 20 pontos

Escrever $\frac{x e^{-x} + 2x}{x} = e^x - \frac{2}{3}$ 1 ponto

Obter a equação $e^x - e^{-x} - \frac{8}{3} = 0$ 4 pontos

Obter a equação $e^x - \frac{1}{e^x} - \frac{8}{3} = 0$ 2 pontos

Obter a equação $3(e^x)^2 - 8e^x - 3 = 0$ 4 pontos

Resolver a equação $3(e^x)^2 - 8e^x - 3 = 0$ 8 pontos

Concluir que $e^x = 3 \vee e^x = -\frac{1}{3}$ 4 pontos

Reconhecer que $e^x = -\frac{1}{3}$ é uma equação impossível 2 pontos

Concluir que $e^x = 3 \iff x = \ln 3$ 2 pontos

Concluir que $\ln 3$ é solução da equação 1 ponto

3.1. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\sin x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ (ver nota) 4 pontos

Escrever $\sin x = \frac{1}{1+d}$ 6 pontos

Escrever $\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{1}{1+d}}{\frac{1}{1+d}}$ 1 ponto

Concluir que $f(x) = d$ 4 pontos

Nota – Caso o aluno não escreva esta igualdade mas seja evidente, através da resolução apresentada, que a considerar, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

2.º Processo

Escrever $\text{sen } x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ (**ver nota**) 4 pontos

Escrever $\text{sen } x = \frac{1}{1+d}$ 6 pontos

Obter $d = \frac{1 - \text{sen } x}{\text{sen } x}$ 4 pontos

Concluir que $d = f(x)$ 1 ponto

Nota – Caso o aluno não escreva esta igualdade mas seja evidente, através da resolução apresentada, que a considerou, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3.2. 20 pontos

Estudar a função f quanto à monotonia 16 pontos

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 6 pontos

$$\left(\frac{1 - \text{sen } x}{\text{sen } x}\right)' = \frac{(1 - \text{sen } x)' \text{sen } x - (1 - \text{sen } x)(\text{sen } x)'}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 2$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 4$$

OU

$$\left(\frac{1}{\text{sen } x} - 1\right)' = \frac{-(\text{sen } x)'}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 4$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 2$$

Escrever a equação $f'(x) = 0$ 1 ponto

Concluir que a equação $f'(x) = 0$ é impossível em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ 3 pontos

Concluir que, para qualquer valor de x

pertencente a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ 4 pontos

Concluir que a função f é decrescente 2 pontos

OU

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) 6 pontos

$$\left(\frac{1 - \text{sen } x}{\text{sen } x}\right)' = \frac{(1 - \text{sen } x)' \text{sen } x - (1 - \text{sen } x)(\text{sen } x)'}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 2$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 4$$

OU

$$\left(\frac{1}{\text{sen } x} - 1\right)' = \frac{-(\text{sen } x)'}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 4$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \dots\dots 2$$

Concluir que, para qualquer valor de x

pertencente a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ 8 pontos

Concluir que a função f é decrescente 2 pontos

Concluir que a afirmação é verdadeira 4 pontos

Nota – Se existir evidência de que o aluno pretende determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4. **15 pontos**

Traduzir o problema por uma equação ($f'(x) = 3$) 5 pontos

Resolver graficamente a equação 8 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora (**ver notas 1, 2 e 3**) 7 pontos

Assinalar no gráfico o ponto cuja abcissa é a solução da equação 1 ponto

Indicar o valor pedido arredondado às centésimas 2 pontos

Notas:

1. Caso o aluno comece por derivar a função f , a pontuação prevista para esta etapa deve ser distribuída do seguinte modo:

Escrever $(x \ln x + \sin(2x))' = (x \ln x)' + (\sin(2x))'$ 1

Derivar $x \ln x$ 2

Derivar $\sin(2x)$ 1

Apresentar o(s) gráfico(s) (**ver nota 4**) 3

2. Caso o aluno não apresente o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3. Caso o aluno apresente um gráfico que não respeite o domínio de f , a pontuação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

4. Caso o aluno obtenha uma expressão incorrecta da derivada, considera-se que o gráfico está correcto se estiver de acordo com essa expressão.

5. 20 pontos

A resolução deste item envolve a utilização das seguintes propriedades:

- relação da probabilidade de um acontecimento com a do seu contrário;
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- relação da probabilidade da intersecção com a probabilidade condicionada;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	5	O aluno aplica correctamente as quatro propriedades e conclui o pretendido.	20
	4	O aluno aplica correctamente as quatro propriedades mas não conclui o pretendido.	16
	3	O aluno aplica correctamente apenas três propriedades.	12
	2	O aluno aplica correctamente apenas duas propriedades.	8
	1	O aluno aplica correctamente apenas uma propriedade.	4