Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 13.03.2012

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

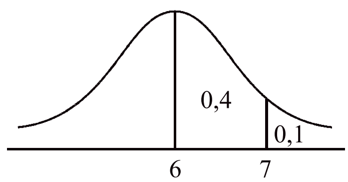
GRUPO I

1. Resposta **(C)**

Sendo A e B dois acontecimentos incompatíveis, tem-se $P(A \cap B) = 0$

2. Resposta **(B)**

Tem-se $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



$P(B) = P(x > 6) = 0{,}5$

$P(A \cap B) = P(6 < X < 7) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$

Portanto, $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}5} = \dfrac{4}{5}$

3. Resposta **(A)**

$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(e) = 0$

Só se tem $f(e) = 0$ na opção **(A)**.

4. Resposta **(B)**

A função g é contínua no ponto 0 se e só se $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2\times \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{2x}$

Seja $y = 2x$. Como $x \to 0^-$, tem-se $y \to 0^-$

Assim, $2\times \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 2\times \lim_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y} = 2\times 1 = 2$

Portanto, $g(0)$ tem de ser igual a 2, pelo que $\alpha = 2$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\beta - \dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \beta - \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \beta - 1$

Portanto $\beta - 1$ tem de ser igual a 2, pelo que $\beta = 3$

Assim, $\alpha = 2$ e $\beta = 3$

5. Resposta **(D)**

Quando $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto O, pelo que $f(0) = \overline{OA}$. Quando x tende para $+\infty$, a reta AP tende a coincidir com a reta AB, pelo que a intersecção da reta AP com o quadrado tende a coincidir com o segmento de reta $[AB]$

Assim, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \overline{AB} = \overline{OA} = f(0)$

Como $f(0) \neq 0$ (pois $\overline{OA} \neq 0$) e como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = f(0)$, a opção correta é a opção **(D)**.

GRUPO II

1.1. Existem $10!$ maneiras diferentes de sentar os 10 rapazes na fila da frente.

A delegada e a subdelegada podem ocupar as extremidades da fila de trás de 2 maneiras diferentes. Para cada uma destas maneiras, as restantes 12 raparigas podem dispor-se de $12!$ maneiras diferentes. Portanto, o número de maneiras diferentes de dispor as raparigas, de modo que a delegada fique numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, é $2 \times 12!$

Então, os 24 jovens podem dispor-se de $10! \times 12! \times 2$ maneiras diferentes.

1.2. A variável aleatória X pode tomar o valor 0 (se a comissão for constituída só por rapazes), o valor 1 se a comissão for constituída por uma rapariga e um rapaz) e o valor 2 (se a comissão for constituída só por raparigas).

Tem-se então que:

$$P(X=0)=\frac{{}^{10}C_2}{{}^{24}C_2}=\frac{15}{92} \qquad P(X=1)=\frac{14\times 10}{{}^{24}C_2}=\frac{35}{69}$$

$$P(X=2)=\frac{{}^{14}C_2}{{}^{24}C_2}=\frac{91}{276}$$

Tem-se, portanto, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{92}$	$\frac{35}{69}$	$\frac{91}{276}$

2.1. Em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo.

Portanto, para que a expressão $2+\log_3 x \geq 4+\log_3(x-8)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $x>0$ e que $x-8>0$

$x>0 \wedge x-8>0 \Leftrightarrow x>8 \Leftrightarrow x \in]8,+\infty[$

No intervalo $]8,+\infty[$, tem-se:

$2+\log_3 x \geq 4+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq 2+\log_3(x-8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 9+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3(9x-72) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq 9x-72 \Leftrightarrow -8x \geq -72 \Leftrightarrow x \leq 9$

Portanto, o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é $]-\infty,9] \cap]8,+\infty[=]8,9]$

2.2. Tem-se:

$f(36^{1000})-f(4^{1000})=2+\log_3(36^{1000})-2-\log_3(4^{1000})=$

$=\log_3(36^{1000})-\log_3(4^{1000})=1000\log_3(36)-1000\log_3(4)=1000\big(\log_3(36)-\log_3(4)\big)=$

$=1000\log_3\left(\frac{36}{4}\right)=1000\log_3(9)=1000\times 2=2000$

2.3. $g(x) = x + f(x) = x + 2 + \log_3 x$

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo que é contínua em $[1, 3]$

Tem-se:

- $g(1) = 1 + 2 + \log_3(1) = 1 + 2 + 0 = 3$
- $g(3) = 3 + 2 + \log_3(3) = 3 + 2 + 1 = 6$

Portanto, $g(1) < 5 < g(3)$

Logo, o teorema de Bolzano permite garantir que $\exists c \in]1, 3[: g(c) = 5$

3.1. Comecemos por determinar o número de frangos infetados no instante em que o vírus foi detetado.

$$f(0) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^3} = \frac{200}{25} = 8$$

Determinemos, agora, ao fim de quantos dias o número de frangos infetados foi dez vezes maior do que 8, ou seja, 80

$$f(x) = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1x}} = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{80} = 1 + 3 \times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \times 2^{3-0,1x} = 2,5 \Leftrightarrow 2^{3-0,1x} = \frac{1,5}{3} \Leftrightarrow 2^{3-0,1x} = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3-0,1x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 3 - 0,1x = -1 \Leftrightarrow -0,1x = -4 \Leftrightarrow x = 40$$

Portanto, tinham passado 40 dias desde o instante em que o vírus foi detetado.

3.2. Comecemos por determinar o número de frangos infetados trinta dias após o vírus ter sido detetado.

$$f(30) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1 \times 30}} = 50$$

Assim, trinta dias após o vírus ter sido detetado, existiam no aviário 50 frangos infetados e 450 frangos não infetados, ou seja, havia um total de 500 frangos.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o frango escolhido estar infetado» B: «o teste dar negativo»

Pretendemos calcular $P(\overline{A} \mid B)$

Sabemos que $P(\overline{B} \mid A) = 0,96$ e $P(B \mid \overline{A}) = 0,9$

Por outro lado, como ao fim de 30 dias após o vírus ter sido detetado existem 50 frangos infetados, tem-se $P(A) = \frac{50}{500} = 0,1$ e $P(\overline{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$

Tem-se:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B} \mid A) = 0,1 \times 0,96 = 0,096$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B \mid \overline{A}) = 0,9 \times 0,9 = 0,81$$

	A	$\overline{A}$	
B		0,81	
$\overline{B}$	0,096		
	0,1	0,9	1

Continuando a preencher as células da tabela necessárias à resolução do problema, vem

	A	$\overline{A}$	
B	0,004	0,81	0,814
$\overline{B}$	0,096		
	0,1	0,9	1

Portanto,

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,81}{0,814} \approx 0,995$$

Em vez de considerarmos probabilidades, poderíamos elaborar uma tabela com base no número de frangos, tendo-se, então,

	A	$\overline{A}$	
B		$450 \times 0,9$	
$\overline{B}$	$50 \times 0,96$		
	50	450	500

Continuando a preencher as células necessárias à resolução do problema, vem

	A	$\overline{A}$	
B	2	405	407
$\overline{B}$	48		
	50	450	500

E, portanto, $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{405}{500}}{\frac{407}{500}} = \dfrac{405}{407} \approx 0,995$

4. Tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(k + xe^{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} k + \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{x}\right) =$$

$$= k + \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{x}\right) = k + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right)$$

Seja $y = -x$. Como $x \to -\infty$, tem-se $y \to +\infty$

Então,

$$k + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = k + \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{y}{e^{y}}\right) = k - \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{e^{y}}\right) =$$

$$= k - \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{y}} = k - \frac{1}{+\infty} = k - 0 = k$$

Portanto, a reta de equação $y = k$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 2 + 0 = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

Portanto, para que as duas assíntotas sejam coincidentes, k tem de ser igual a 2