Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2013

12.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

A função f é contínua; logo, é contínua no ponto 0, pelo que se tem $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(k - x) = \ln k$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2e^x + \frac{1}{\ln x}\right) = 2 \times e^0 + \frac{1}{-\infty} = 2 + 0 = 2$$

Tem-se, então, $\ln k = 2$ e, portanto, $k = e^2$

2. Resposta **(D)**

O declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a é $f'(a)$

$$f'(x) = \left(x^a + a^2 \ln x\right)' = \left(x^a\right)' + \left(a^2 \ln x\right)' = ax^{a-1} + \frac{a^2}{x}$$

Assim, $f'(a) = a \times a^{a-1} + \dfrac{a^2}{a} = a^a + a$

Portanto, o declive da reta r é $a^a + a$

3. Resposta **(D)**

Comecemos por determinar os zeros da função f''

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{eq. impossível}} \vee x^2=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Embora a função f'' tenha dois zeros $(0$ e $1)$, só muda de sinal em $x=1$, pois, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}x^2 \geq 0$

Portanto, o gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

4. Resposta **(B)**

Dado que estamos a considerar apenas os números maiores do que $40\,000$, existem duas hipóteses para o primeiro algarismo (o das dezenas de milhar): 4 ou 5

Para que o número seja ímpar, tem-se:

- Se o primeiro algarismo for 4, existem três hipóteses para o algarismo das unidades: 1, 3 ou 5. Para cada uma destas, existem $3!$ maneiras diferentes de colocar os três algarismos centrais. Portanto, se o primeiro algarismo for 4, existem $1 \times 3! \times 3$, ou seja 18, números ímpares.
- Se o primeiro algarismo for 5, existem duas hipóteses para o algarismo das unidades: 1 ou 3. Para cada uma destas, existem $3!$ maneiras diferentes de colocar os três algarismos centrais. Portanto, se o primeiro algarismo for 5, existem $1 \times 3! \times 2$, ou seja 12, números ímpares.

Como as duas hipóteses consideradas são mutuamente exclusivas, há $18+12$ números nas condições exigidas.

Portanto, podem obter-se 30 números ímpares maiores do que $40\,000$

5. Resposta **(C)**

Dado que $z = \operatorname{cis}\theta$, tem-se $z^2 = \operatorname{cis}(2\theta)$

Assim, tem-se $|z^2|=1$ e, como $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$, tem-se $\frac{3\pi}{2} < 2\theta < 2\pi$

Portanto, a imagem geométrica de z^2 pertence ao quarto de circunferência com centro na origem do referencial e raio 1, contido no quarto quadrante.

A imagem geométrica de $w = z^2 - 2$ está no terceiro quadrante, pois resulta de aplicar à imagem geométrica de z^2 a translação associada ao vetor de coordenadas $(-2,\ 0)$

GRUPO II

1.1. $\dfrac{i^6+2i^7}{2-i}=\dfrac{i^2+2i^3}{2-i}=\dfrac{-1-2i}{2-i}=\dfrac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-2-i-4i+2}{4+1}=\dfrac{-5i}{5}=-i$

1.2. Substituindo, na equação $z^6\times\overline{z}=128\,i$, a variável z por $2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$, vem:

$$\left[2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^6\times\overline{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right)}=128\,i\Leftrightarrow 64\operatorname{cis}\left(6\times\frac{\pi}{10}\right)\times 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{10}\right)=128\,i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 128\operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=128\,i\Leftrightarrow 128\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)=128\,i$$

A igualdade $128\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=128\,i$ é verdadeira.

Portanto, $2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ é solução da equação $z^6\times\overline{z}=128\,i$

2.1. A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 6 e 9 , tendo-se:

$$P(X=0)=\frac{{}^4C_2+4\times 3}{{}^7C_2}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

$$P(X=6)=\frac{2\times 1}{{}^7C_2}=\frac{2}{21}$$

$$P(X=9)=\frac{1}{{}^7C_2}=\frac{1}{21}$$

Tem-se, assim, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X

x_i	0	6	9
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(B\mid A)$ designa a probabilidade de a segunda bola retirada ter o número 2, sabendo que não saíram bolas com o número 0 em extrações consecutivas.

Dado que não saíram bolas com o número 0 em extrações consecutivas, as bolas com o número 0 só podem ter sido retiradas nos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º lugares. Assim, só existem três possibilidades de retirar as sete bolas:

0203030, 0302030 e 0303020

Apenas numa destas três sequências, a bola com o número 2 é retirada em segundo lugar.

Portanto, por aplicação da regra de Laplace, a probabilidade pedida é igual a $\dfrac{1}{3}$

3.1. A área do trapézio $[PBCE]$ é dada por $\dfrac{\overline{PE}+\overline{BC}}{2}\times\overline{BQ}$

Tem-se:

$\cos x=\dfrac{\overline{PQ}}{4}\Leftrightarrow\overline{PQ}=4\cos x$, pelo que $\overline{PE}=2+4\cos x$

$\operatorname{sen} x=\dfrac{\overline{BQ}}{4}\Leftrightarrow\overline{BQ}=4\operatorname{sen} x$

Portanto,

$$S(x)=\frac{(2+4\cos x)+2}{2}\times 4\operatorname{sen}x=\frac{4+4\cos x}{2}\times 4\operatorname{sen}x=(2+2\cos x)\times 4\operatorname{sen}x=$$

$$=8\operatorname{sen}x+8\operatorname{sen}x\cos x=8\operatorname{sen}x+4\times 2\operatorname{sen}x\cos x=8\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}(2x)$$

3.2. Em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se:

$$S'(x)=[8\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}(2x)]'=8\cos x+8\cos(2x)$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow 8\cos x+8\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos x+\cos(2x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos x=-\cos(2x)\Leftrightarrow\cos x=\cos(\pi-2x)$$

Em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\cos x=\cos(\pi-2x)\Leftrightarrow x=\pi-2x+2k\pi\ \vee\ x=-(\pi-2x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=\pi+2k\pi\ \vee\ -x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\ \vee\ x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ora, das soluções desta condição, somente $\frac{\pi}{3}$ pertence ao intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Portanto, a equação $S'(x)=0$ tem apenas uma solução: $\frac{\pi}{3}$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
S'	n.d.	+	0	–	n.d.
S	n.d.	↗	Máx.	↘	n.d.

Portanto,

- a função S é crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$
- a função S é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$
- a função S tem máximo para $x=\frac{\pi}{3}$

4.1. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{2}+h+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\frac{\pi}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\dfrac{h+\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{h-\operatorname{sen}h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1-\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}\right) =$

$= 1 - \lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1-1 = 0$

4.2. $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\dfrac{3x+1-xe^x}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}-e^x\right) = 3+\dfrac{1}{-\infty}-e^{-\infty} = 3+0-0 = 3$

$\lim_{x\to -\infty}[f(x)-3x] = \lim_{x\to -\infty}(3x+1-xe^x-3x) = \lim_{x\to -\infty}(1-xe^x) = 1-\lim_{x\to -\infty}(xe^x) \overset{\infty\times 0}{=}$

$= 1-\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} = 1-\lim_{y\to +\infty}\dfrac{-y}{e^y} = 1+\dfrac{1}{\lim_{y\to +\infty}\dfrac{e^y}{y}} = 1+\dfrac{1}{+\infty} = 1+0 = 1$

Portanto, a reta de equação $y = 3x+1$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f quando $x \to -\infty$

5. A função g é uma função contínua, pois é a soma de duas funções contínuas (uma função polinomial e uma função logarítmica).

Como o intervalo $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right]$ está contido no domínio de g, podemos concluir que g é contínua em $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right]$

Tem-se:

- $g\left(\dfrac{1}{a}\right) = a\times\dfrac{1}{a}+\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1-\ln a$

  Como $a > e$, tem-se $\ln a > 1$

  Portanto, $1-\ln a < 0$, pelo que $g\left(\dfrac{1}{a}\right) < 0$

- $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = a\times\dfrac{1}{e}+\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{a}{e}-1 = \dfrac{a-e}{e}$

  Como $a > e$, tem-se $g\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$

  Como a função g é contínua em $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right]$ e como se tem $g\left(\frac{1}{a}\right) < 0$ e $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, podemos concluir, pelo teorema de Bolzano, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{a}, \frac{1}{e}\right[$