Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 29.11.2013

12.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

Tem-se $2{,}2 = a\times 0 + b\times 2 + 0{,}3\times 4$, pelo que $b = 0{,}5$

Como $a + b + 0{,}3 = 1$, vem $a = 0{,}2$

2. Resposta **(A)**

A soma de todos os elementos da linha do triângulo de Pascal que contém os elementos da forma ${}^{n}C_k$ é igual a 2^n

Como $256 = 2^8$, a linha do triângulo de Pascal em que a soma de todos os elementos é igual a 256 é a linha que contém os elementos da forma ${}^{8}C_k$

O terceiro elemento dessa linha é ${}^{8}C_2 = 28$

3. Resposta **(D)**

Cada termo do desenvolvimento de $(x^2+2)^6$ é da forma ${}^{6}C_p \times (x^2)^{6-p}\times 2^p$, $0\le p\le 6$

O valor de p para o qual se obtém o termo de grau 6 é o que satisfaz a condição $2(6-p)=6$

Então, tem-se $p=3$, e o termo de grau 6 do desenvolvimento de $(x^2+2)^6$ é

${}^{6}C_3 \times (x^2)^3 \times 2^3 = 160\,x^6$

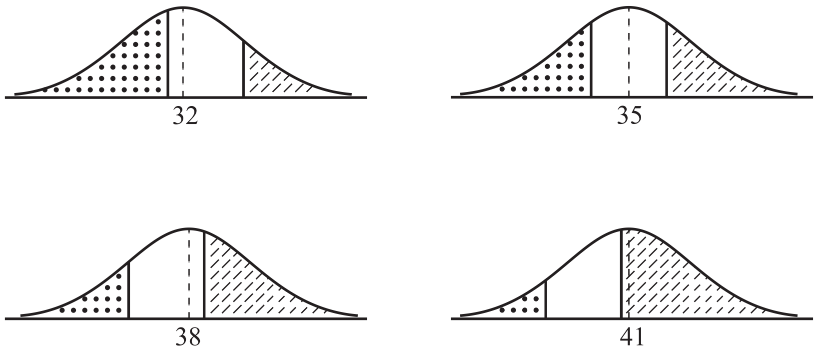
4. Resposta **(D)**

$$P\left(\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})\right) = P\left((\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right) = P\left(\Omega\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right) = P(\overline{A}\cup\overline{B}) =$$
$$= P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

5. Resposta **(A)**

Vamos representar, para cada uma das opções do valor médio:

- a área correspondente a $P(X<30)$, a ponteado,
- a área correspondente a $P(X>40)$, a tracejado.



A opção em que $P(X>40)$ é inferior a $P(X<30)$ é aquela em que o valor médio da variável é 32

GRUPO II

1.1. As bolas com os números 3 e 4 podem ficar ao lado uma da outra de quatro maneiras diferentes: ou ocupando as duas primeiras posições, ou a segunda e a terceira, ou a terceira e a quarta, ou as duas últimas posições.

Para cada uma destas quatro hipóteses, as bolas com os números 3 e 4 podem permutar entre si, bem como as restantes três bolas. Portanto, há $4\times 2\times 3!$ maneiras de colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra.

Então, o número pedido é $4\times 2\times 3! = 48$

1.2.1. Na caixa, estão três bolas numeradas com número ímpar e duas bolas numeradas com número par.

Portanto, a variável aleatória X pode tomar o valor 1 (se for retirada uma das três bolas com número ímpar e as duas bolas com número par), o valor 2 (se forem retiradas duas das três bolas com número ímpar e uma das duas bolas com número par) e o valor 3 (se forem retiradas as três bolas com número ímpar).

Tem-se então:

$$P(X=1)=\frac{3\times 1}{{}^{5}C_3}=\frac{3}{10} \qquad P(X=2)=\frac{{}^{3}C_2\times 2}{{}^{5}C_3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5} \qquad P(X=3)=\frac{1}{{}^{5}C_3}=\frac{1}{10}$$

Portanto, a tabela de distribuição de probabilidades da variável X é

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

1.2.2. A probabilidade pedida é a probabilidade de a soma dos números das bolas retiradas ser inferior a 10, sabendo que foi retirada uma bola com número ímpar.

Como só foi retirada uma bola com número ímpar, os casos possíveis são os seguintes:

$$\{1, 2, 4\}, \ \{3, 2, 4\} \text{ e } \{5, 2, 4\}$$

Atendendo a que $1 + 2 + 4 = 7$, $3 + 2 + 4 = 9$ e $5 + 2 + 4 = 11$, os casos favoráveis a que a soma dos números das bolas retiradas seja inferior a 10 são $\{1, 2, 4\}$ e $\{3, 2, 4\}$

Portanto, por aplicação da regra de Laplace, tem-se $P(Y < 10 \mid X = 1) = \frac{2}{3}$

2.1. Seja X o número de vezes que sai a face com o número 1 nos oito lançamentos.

A variável X é uma variável aleatória com distribuição binomial.

A probabilidade de sair a face com o número 1, em qualquer dos lançamentos, é $\frac{1}{6}$

Portanto,

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - {}^8C_0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^8 - {}^8C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}4$$

2.2. Dizer que o número de dados cúbicos é igual ao triplo do número de dados octaédricos é o mesmo que dizer que, em cada quatro dados, três são cúbicos e um é octaédrico.

Portanto, $\frac{3}{4}$ dos dados são cúbicos e $\frac{1}{4}$ dos dados são octaédricos.

Em relação à experiência aleatória «seleção de um dos dados da coleção», sejam A e C os acontecimentos seguintes.

A: «o dado selecionado é amarelo» $\quad$ C: «o dado selecionado é cúbico»

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}1$
- $P(C) = \frac{3}{4} = 0{,}75$
- $P(\overline{C}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- $P(C \mid A) = 0{,}2$

Pretende-se calcular $P(\overline{C} \mid \overline{A})$

De $P(A) = 0{,}1$, conclui-se que $P(\overline{A}) = 0{,}9$

De $P(C \mid A) = 0{,}2$, conclui-se que $\frac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0{,}2$ e, portanto, $P(C \cap A) = 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}02$

Tem-se, então

	C	$\overline{C}$	
A	$0{,}02$		$0{,}1$
$\overline{A}$			$0{,}9$
	$0{,}75$	$0{,}25$	1

Completando a tabela, vem

	C	$\overline{C}$	
A	0,02	0,08	0,1
$\overline{A}$	0,73	0,17	0,9
	0,75	0,25	1

Portanto, $P(\overline{C} \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{C} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,17}{0,9} = \dfrac{17}{90}$

3. Atendendo a que os acontecimentos A e B são incompatíveis, tem-se $A \cap B = \varnothing$ e, portanto, $P(A \cap B) = 0$

Logo, $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$

Como, de acordo com o enunciado, $P(A) \neq 0$, pode afirmar-se que $P(A \mid B) \neq P(A)$

De A e B serem incompatíveis, conclui-se que A está contido no complementar de B $(A \subset \overline{B})$ e, portanto, $\overline{B} \cap A = A$

Assim, $P(\overline{B} \mid A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

Como $A \subset \overline{B}$, tem-se $P(A) \leq P(\overline{B})$ e, dado que $P(B) > 0$, tem-se $P(\overline{B}) < 1$

Assim, $P(A) < 1$ e, consequentemente, $P(A) \neq P(\overline{B} \mid A)$

Concluindo, $P(A \mid B) < P(A) < P(\overline{B} \mid A)$

4.1. O número de casos possíveis é ${}^6C_2$

A reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$ é paralela ao eixo Oz

Portanto, o único caso favorável é a escolha dos vértices A e F

A probabilidade pedida é $\dfrac{1}{{}^6C_2} = \dfrac{1}{15}$

4.2. Tem-se $X = \{A, B, F, D\}$, $Y = \{A, B, C\}$ e $X \cap Y = \{A, B\}$

Portanto, $P(X) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $P(Y) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $P(X \cap Y) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Atendendo a que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}$, pode concluir-se que os acontecimentos X e Y são independentes, pois $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$

4.3. No vértice A, concorrem quatro faces, uma das quais já está numerada com o número 1

Existem duas hipóteses, em alternativa, que satisfazem as condições do enunciado.

- Hipótese 1: as três faces concorrentes no vértice A, ainda não numeradas, serem numeradas com números ímpares;
- Hipótese 2: exatamente duas das três faces concorrentes no vértice A, ainda não numeradas, serem numeradas com números ímpares.

Na primeira hipótese, há $3!$ maneiras de colocar os três números ímpares disponíveis (o 3, o 5 e o 7) nas restantes três faces concorrentes no vértice A e, para cada uma dessas maneiras, há $4!$ formas de colocar os quatro números pares (o 2, o 4, o 6 e o 8) nas restantes quatro faces. Portanto, existem $3! \times 4!$ maneiras de numerar as restantes faces do octaedro, satisfazendo a hipótese 1.

Na segunda hipótese, uma das faces concorrentes no vértice A vai ser numerada com um número par. Há 4 opções para a escolha do número par e há 3 opções para a escolha da face onde vai ser colocado. Portanto, existem 4×3 maneiras diferentes de escolher e colocar um número par numa das faces que concorrem no vértice A. Para cada uma destas maneiras, há ${}^{3}A_{2}$ maneiras diferentes de escolher e colocar dois dos três números ímpares disponíveis nas faces concorrentes no vértice A, ainda não numeradas. Finalmente, para cada maneira de numerar as faces concorrentes no vértice A, há $4!$ formas de distribuir os restantes números pelas faces ainda não numeradas. Portanto, existem $4 \times 3 \times {}^{3}A_{2} \times 4!$ maneiras de numerar as restantes faces do octaedro, satisfazendo a hipótese 2.

Por isso, o número pedido é $3! \times 4! + 4 \times 3 \times {}^{3}A_{2} \times 4!$, ou seja, 1872