Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2002/03 — 11 de Fevereiro de 2003

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um número real.

   (a) i. Defina ponto de acumulação.

   ii. Mostre que a é ponto de acumulação de X se e só se

   $$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in X \quad : \quad 0 < |a - x| < \frac{1}{n}.$$

   (b) Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função cujo domínio X não é limitado superiormente.

   i. Enuncie uma condição equivalente a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq L$ que envolva apenas limites de sucessões.

   ii. Use essa condição para provar que não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \sin x)$.

2. Considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Usando indução matemática, mostre que:

   i. a sucessão $(x_n)_n$ é crescente;

   ii. para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq 3$.

   (b) Pode concluir que a sucessão é convergente? Porquê? Em caso afirmativo, calcule o seu limite.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e}{e(x-1)} & \text{se } x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Verifique que f é contínua no ponto 1.

   (b) Calcule as derivadas laterais de f em $x = 1$. A função f é derivável nesse ponto?

   (c) Calcule $f'(4)$.

   (d) Sem efectuar cálculos, diga se a proposição

   $$\exists c \in]1, 4[\ : \ f'(c) = \frac{1}{3}$$

   é verdadeira. Justifique a sua resposta.

   (e) Usando uma aproximação linear conveniente da função f, calcule um valor aproximado de $f(4,1)$.

4. (a) Enuncie o resultado que estabelece a Fórmula de Taylor, de ordem n, num ponto a, com Resto de Lagrange para uma função f.

   (b) Seja $g(x) = xe^{x-1}$.

   i. Determine $g^{(n)}(x)$.

   ii. Deduza a Fórmula de Taylor, com Resto de Lagrange, de ordem n, da função g no ponto $a = 1$.

   iii. Prove que, para $x \in [0, 1]$,

   $$1 + 2(x-1) \leq xe^{x-1} \leq 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$