**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 — 12 de Fevereiro de 2004

*Observação*: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Sejam $X$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e $a$ um número real. Mostre que:

   (a) $\mathbb{R} \setminus X$ não é limitado.

   (b) Se $a$ é ponto de acumulação de $X$ então $a$ não é ponto interior de $\mathbb{R} \setminus X$.

   (c) $\sup X$ não é ponto interior de $X$.

2. Calcule os limites das sucessões:

   (a) $\left(\dfrac{\cosh(n+1)}{e^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $\left(n \sin \dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ e^{1-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\log x}{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de $f$. Classifique os seus pontos de descontinuidade.

   (b) Determine $f'(x)$.

   (c) Mostre que existe $c \in ]0, e[$ tal que $f(c) = 1$.

   (d) Verifique que a função $f$ é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$, $[0, 1]$ e $[1, +\infty[$.

   (Sugestão: Para determinar o sinal de $f'$ no intervalo $]1, +\infty[$ pode ser útil estudar o sinal de $\left(\frac{x-1}{x} - \log x\right)'$.)

   (e) Da alínea anterior poderá concluir que:

      i. $f$ é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$? Porquê?

      ii. $f$ é decrescente em $]-\infty, +\infty[$? Porquê?

4. (a) Deduza a Fórmula de Taylor, com Resto de Lagrange, de ordem 3, no ponto $a = 0$, para a função definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$.

   (b) Prove que: $(\forall x \in ]-1, +\infty[) \quad \sqrt{x+1} \leq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16}$.

5. Considere a equação $\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1$, onde $y = y(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}$. Usando derivação implícita prove que as soluções desta equação são as funções $y = m\,x$, com $m = \frac{\pi}{4} + k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.