Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 22 de Outubro de 2003

Teste 1 **Nome do aluno:**

1. Indique qual das duas expressões seguintes é consequência da outra e apresente uma interpretação que as torne não equivalentes:

$$(\forall x)\ (p(x) \vee r(x)) \qquad \text{e} \qquad (\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ r(x)).$$

A primeira expressão é consequência da segunda: na segunda garante-se que ou $p(x)$ é válida para todo o x ou $r(x)$ é válida para todo o elemento x. No primeiro caso garante-se que, para todo o x, $p(x)$ é válida, logo também $p(x) \vee r(x)$, enquanto que no segundo se garante que $r(x)$ é válida para todo o x, logo também $p(x) \vee r(x)$.

Para verificar que as expressões não são equivalentes, consideremos a seguinte interpretação: "x pertence aos números naturais",
$p(x)$: "x é um número par" e "$r(x)$: "x é um número ímpar".

A primeira expressão torna-se verdadeira, pois: $\forall x \in \mathbb{N}$ (x é par $\vee$ x é ímpar), enquanto que a segunda é falsa: ($\forall x \in \mathbb{N}$ x é par) $\vee$ ($\forall x \in \mathbb{N}$ x é ímpar), pois é uma disjunção em que ambas as proposições são falsas.

2. (a) Prove que, para um subconjunto qualquer A de um conjunto X, se tem

$$\mathcal{P}(A^c) \subseteq \{\emptyset\} \cup (\mathcal{P}(A))^c.$$

Se $S \subseteq A^c$, então ou $S = \emptyset$ ou S tem pelo menos um elemento, que pertence ao complementar de A. Logo, se $S \neq \emptyset$, então $S \not\subseteq A$, isto é, $S \in (\mathcal{P}(A))^c$.

(b) Prove que, caso X tenha pelo menos dois elementos, então existe um subconjunto A de X tal que a inclusão acima é estrita.

Se X tem pelo menos dois elementos, então tem um subconjunto A não vazio e diferente de X. Nesse caso, $X \notin \mathcal{P}(A^c)$, mas $X \in (\mathcal{P}(A))^c$, pois $X \not\subseteq A$. Logo, a inclusão é estrita.

3. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $f(n) = 2n - 1$.

(a) f é uma função injectiva?

Quaisquer que sejam os números naturais n e m, se $f(n) = f(m)$, isto é, se $2n - 1 = 2m - 1$, então necessariamente $n = m$. Logo, f é uma função injectiva.

(b) É sobrejectiva?

Não, pois, tal como qualquer outro número natural par, 2 não é imagem, por f, de nenhum número natural.

(c) Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; n \leq 1000\}$. Calcule $f(X)$.

Como $n \leq 1000$ se e só se $2n - 1$ é um número ímpar menor ou igual a $2 \times 1000 - 1$, temos que
$f(X) = \{k \in \mathbb{N}; k \text{ é ímpar e } k \leq 1999\}$.

(d) Calcule $f^{-1}(Y)$, para $Y = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par}\}$.

O conjunto $\{k \in \mathbb{N}; 2k - 1 \text{ é par}\}$ é claramente vazio, pois, para todo o número natural k, $2k - 1$ é um número ímpar. Logo, $f^{-1}(Y) = \emptyset$.