**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2003/04 17 de Novembro de 2003

**Teste 2** **Nome do aluno:**

1. Prove que 1 é ponto de acumulação do conjunto $A = \{1 + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Pela Propriedade Arquimediana, existe um número natural $n$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Logo, $1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$ e então $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\cap A \setminus \{1\} \neq \emptyset$, como queríamos demonstrar.

2. Calcule, se possível, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n - n}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n - n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right).$$

Como $(\sin n)_n$ é uma sucessão limitada e $(\sqrt{n})_n$ diverge para $+\infty$, a sucessão $\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge para 0, enquanto que a sucessão $(-\sqrt{n})_n$ diverge para $-\infty$. Logo, a sua soma, isto é, a sucessão $\left(\frac{\sin n - n}{\sqrt{n}}\right)_n$, diverge para $-\infty$.

Em alternativa:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{\sin n - n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, e então $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, concluímos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}} = -\infty$. Logo, usando a desigualdade anterior, podemos concluir que a sucessão dada diverge também para $-\infty$.

3. Estude a continuidade da seguinte função, indicando, nos pontos de descontinuidade, o tipo de descontinuidade que ocorre:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(x+1)} & \text{se } x \in\, ]-1, 0[ \\ 1 & \text{se } x \notin\, ]-1, 0[ \end{cases}$$

O domínio de $f$ é $\mathbb{R}$. Nos intervalos abertos $]-\infty, -1[$ e $]0, +\infty[$ a função é constante, logo $f$ é contínua em todos os pontos destes intervalos. Em $]-1, 0[$ $f$ é o quociente de duas funções, tendo em numerador a função sin, contínua, e em denominador um polinómio, também contínuo.

Falta-nos estudar o comportamento da função nos pontos $a = -1$ e $a = 0$.

Para $a = -1$, temos:

$\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1} 1 = 1 = f(1)$, e

$\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\sin x}{x(x+1)} = +\infty$, pois $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{\sin x}{x} = -\sin(-1) > 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.

Logo, $f$ tem uma descontinuidade essencial de segunda espécie em $a = -1$.

Para $a = 0$, vem:

$\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x(x+1)} = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1} = 1$, uma vez que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to0} \frac{1}{x+1}$, e $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1 = f(0)$.

Logo, $f$ é contínua no ponto 0.