Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 6 de Janeiro de 2005

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. (a) Mostre que, se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $a \in A$, então $A \setminus \{a\}$ é aberto.

   O conjunto $A \setminus \{a\}$ é aberto porque é intersecção de dois abertos: $A \setminus \{a\} = A \cap (]-\infty, a[\cup]a, +\infty[)$.

   (*Em alternativa:*) Seja $x \in A \setminus \{a\}$. Como A é aberto e $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$. Seja $\delta = \min\{\varepsilon, |x-a|\}$. Então $\delta > 0$ e $a \notin]x-\delta, x+\delta[$. Logo $]x-\delta, x+\delta[\subseteq A \setminus \{a\}$.

   (b) Indique exemplos que mostrem que, se $B \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $b \in B$, então $B \setminus \{b\}$ pode ser ou não fechado.

   Se $B = [0,1]$ e $b = 1$, então $B \setminus \{b\} = [0,1[$, que não é fechado, pois $1 \in \overline{B} \setminus B$.

   Se $B = \{0,1\}$ e $b = 1$, então $B = \{0\}$, que é fechado.

2. (a) Calcule o limite da sucessão $\left(\dfrac{n}{\log(2+e^{3n})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Como $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \log(2+e^{3x}) = +\infty$, vamos usar a Regra de Cauchy para tentar determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log(2+e^{3x})}$ (caso exista, será também esse o valor de $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(2+e^{3n})}$, pois a sucessão a estudar é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função definida em $[1,+\infty[$ por $f(x) = \frac{x}{\log(2+e^{3x})}$).

   Atendendo a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{[\log(2+e^{3x})]'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{e^{3x}}+1}{3} = \dfrac{1}{3}$ podemos afirmar que $\dfrac{1}{3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log(2+e^{3x})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log(2+e^{3n})}$.

   (b) Considere a sucessão (x_n) definida por $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. Verifique se é convergente e, em caso afirmativo, calcule o seu limite.
   (Sugestão: Comece por provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2$.)

   Verifiquemos em primeiro lugar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2$:
   $x_1 = \sqrt{2} < 2$; se $x_k < 2$, então $x_{k+1} = \sqrt{2x_k} < \sqrt{2\times 2} = 2$.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\sqrt{2x_n}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{2}{x_n}} > 1$, logo a sucessão (x_n) é crescente. Como é limitada superiormente, é convergente.

   Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Então também $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$. Da igualdade $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ concluímos que $L = \sqrt{2L}$, logo $L^2 = 2L$. Uma vez que $\sqrt{2} < L \leq 2$, tem-se $L = 2$.

3. Determine, se existirem, os extremos locais e os extremos absolutos da função

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & x\,|x| - x^3 \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x - 3x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(os valores de $f'(-1)$ e de $f'(0)$ podem ser determinados usando, por exemplo, um corolário do Teorema do Valor Médio de Lagrange: $f'(-1) = \lim_{x\to -1^+} f'(x)$ e $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$).

Como f é derivável no seu domínio, os extremos locais só poderão ser atingidos em pontos onde f' se anula, ou ainda em $x = -1$, que não é ponto de acumulação à esquerda de $[-1, +\infty[$.

Se $x \in [-1, 0[$ tem-se $f'(x) = 0$ quando e só quando $x(-2 - 3x) = 0$, ou seja, $x = -\frac{2}{3}$, sendo $f'(x) < 0$ se $x \in [-1, -\frac{2}{3}[$ e $f'(x) > 0$ se $x \in]-\frac{2}{3}, 0[$. Assim, é atingido em $x = -1$ um máximo local, $f(-1) = 0$, e em $x = -\frac{2}{3}$ um mínimo local, $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$.

Se $x \in [0, +\infty[$ tem-se $f'(x) = 0$ quando e só quando $x(2 - 3x) = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$, sendo $f'(x) > 0$ se $x \in [0, \frac{2}{3}[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in]\frac{2}{3}, +\infty[$. Assim, é atingido em $x = \frac{2}{3}$ um máximo local, $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$, mas nenhum extremo local é atingido em $x = 0$ pois vimos anteriormente que $f'(x) > 0$ se $x \in]-\frac{2}{3}, 0[$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ não existe mínimo absoluto de f, sendo o máximo absoluto o maior dos extremos locais referidos anteriormente, ou seja, $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$. A existência de máximo absoluto é garantida pela aplicação do Teorema de Weierstrass à restrição de f (que é contínua no seu domínio) a , por exemplo, $[-1, 2005]$, sendo também evidente após observação do quadro de variação de f:

	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow_{-\infty}$	

4. (a) Mostre que a equação $x^5 + x + 2005 = 0$ tem uma e uma só solução real.

   Seja $f(x) = x^5 + x + 2005$. A função f é polinomial, logo é contínua e derivável em todo o $\mathbb{R}$. Como $f(-2005) = (-2005)^5 < 0$ e $f(0) = 2005 > 0$, pelo Teorema dos Valores Intermédios f tem um zero entre -2005 e 0.

   Se f tiver dois zeros distintos, a e b, com $a < b$, como $f(a) = f(b)$, o Teorema de Rolle garante-nos a existência, no intervalo $]a, b[$, de um zero da função f'. Isto não é possível por que a função $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$ não se anula.

   Logo, a equação $x^5 + x + 2005 = 0$ tem exactamente uma solução real.

   (b) Mostre, usando o Teorema do Valor Médio de Lagrange, que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

   Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a = b$, a desigualdade é imediatamente verificada. Suponhamos $a < b$. Como a função $\arctan : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável em $[a, b]$, pelo Teorema de Lagrange existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a}.$$

Atendendo a que $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$, que é um valor entre 0 e 1, concluímos que

$$\left|\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a}\right| \leq 1,$$

logo $|\arctan b - \arctan a| \leq |b-a|$, como queríamos provar.

5. (Os alunos que pretendam conservar a nota do trabalho devem responder a apenas uma das questões A e B seguintes.)

A. (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 com resto de Lagrange, no ponto $a = 0$, para a função e^{x^2}.

Se $f(x) = e^{x^2}$ então, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$ e $f'''(x) = (12x+8x^3)e^{x^2}$.

Podemos assim garantir que, para $x \neq 0$, existe um c no intervalo aberto limitado (não necessariamente por esta ordem) por x e por 0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(c)\frac{x^3}{3!} \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^3}{6}(12c+8c^3)e^{c^2}, \end{aligned}$$

sendo esta a fórmula pedida.

(b) Mostre que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} \geq 1 + x^2$.

Se $x < 0$ o resto de Lagrange na fórmula anterior é o produto de dois factores negativos, $\frac{x^3}{6}$ e $(12c+8c^3)e^{c^2}$ (como c está entre x e 0, também $c < 0$), logo é positivo. De forma análoga se conclui que o resto de Lagrange é ainda positivo se $x > 0$ (neste caso é o produto de dois factores positivos).

Então, se $x \neq 0$ tem-se $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^3}{6}(12c+8c^3)e^{c^2} > 1 + x^2 + 0$, enquanto para $x = 0$ se tem $e^{0^2} = 1 = 1 + 0^2$.

B. Um automóvel que está $250\,m$ a Leste de um cruzamento desloca-se para Oeste a uma velocidade de 20 metros por segundo. No mesmo instante, outro automóvel que está $700\,m$ a Norte do mesmo cruzamento desloca-se para Sul a uma velocidade de 30 metros por segundo.

Qual a distância mínima que irá existir entre os (centros dos) automóveis?

(Sugestão: Para facilitar os cálculos, deverá escolher como função a minimizar a que nos dá, em cada instante t, o quadrado da distância entre os automóveis.)

Se escolhermos um referencial ortonormado com origem no cruzamento, semi-eixo positivo dos XX orientado para Leste e unidade de comprimento igual a 1 metro temos, no instante inicial, o (centro do) primeiro automóvel situado no ponto de coordenadas $(250, 0)$ e o segundo no ponto $(0, 700)$. Após t segundos as suas coordenadas passam a ser, respectivamente, $(250-20t, 0)$ e $(0, 700-30t)$. A distância entre os dois automóveis no instante $t \in [0, +\infty[$ é então dada por $\sqrt{(250-20t)^2 + (700-30t)^2}$ mas, para facilitar os cálculos, é preferível determinar o mínimo da função definida por

$$f(t) = (250-20t)^2 + (700-30t)^2$$

(se existir, o mínimo de ambas as funções é atingido no mesmo instante, pois a função que a cada número real não negativo faz corresponder o seu quadrado é estritamente crescente).

Como $f'(t) = 0$ se e só se $t = 20$, com $f'(t) < 0$ se $t \in [0, 20[$ e $f'(t) > 0$ se $t \in]20, +\infty[$, pode concluir-se que $f(20)$ é mínimo absoluto de f, sendo $\sqrt{f(20)} = \sqrt{150^2 + 100^2}$ o valor da distância mínima que irá existir entre os (centros dos) dois automóveis se nenhum dos condutores tiver a sensatez de abrandar.

6. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$. Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são equivalentes a $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Para as que não o forem, apresente um contra-exemplo.

   (a) $\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, : \, \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \; \Rightarrow \; |L - f(x)| < \delta$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - L| \leq \varepsilon$;

   (c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in X \quad 0 \leq |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - L| < \varepsilon$;

   (d) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \; \Rightarrow \; |f(x) - L| < \delta$.

   As condições (a) e (b) são equivalentes a $\lim_{x \to a} f(x) = L$; (c) e (d) não.

   A condição (a) é equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : \, \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - L| < \varepsilon,$$

   uma vez que entre elas há apenas uma mudança de notação (ε e δ aparecem permutados) e $|f(x) - L| = |L - f(x)|$.

   É óbvio que de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se conclui (b). Suponhamos que (b) se verifica e seja $\varepsilon > 0$. Considerando $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ em (b), conclui-se que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, logo $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   Para mostrar que (c) não é equivalente a $\lim_{x \to a} f(x) = L$, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Então, para $a = 0$ e $L = 1$, temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ embora a condição (c) não se verifique.

   Para ver que (d) não é equivalente a $\lim_{x \to a} f(x) = L$, consideremos a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ e $L = 1$. Então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ embora a condição (d) não se verifique: para $\varepsilon = 1$, se existisse $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in]0, 2[$, $|\frac{1}{x} - 1| < \delta$, então f seria uma função limitada, o que não se verifica.