Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 | 15 de Novembro de 2004

1. (a) Indique três subsucessões (diferentes) convergentes da sucessão definida por $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.

   $y_n = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$; $z_n = (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$;
   $w_n = (-1)^{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = 1 + \frac{1}{2n^2}$.

   (b) Mostre que a sucessão seguinte não é convergente: $y_n = \begin{cases} 10 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \sin(\pi^n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

   Se considerarmos a subsucessão dos termos pares de (y_n), ela converge para 10. Por outro lado, a subsucessão dos termos ímpares toma valores entre -1 e 1, logo não tem limite 10. Podemos então concluir que a sucessão (y_n) não converge.

2. Calcule, se existir, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sin n - n}{\sqrt{n} - n}$.

   Temos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin n - n}{\sqrt{n} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}$. Como $0 \le |\frac{\sin n}{\sqrt{n}}| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, concluímos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$ e que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$.

3. Considere a sucessão definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + 5)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 5$;

   Em primeiro lugar, $x_1 = 1 < 5$. Se, para $k \in \mathbb{N}$, $x_k < 5$, então
   $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + 5) < \frac{1}{2}(5 + 5) = 5$. Logo, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 5$.

   (b) Determine, se existir, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.

   A sucessão é crescente: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + 5) - x_n = \frac{1}{2}(5 - x_n) > 0$; como – também pela alínea (a) – é limitada, converge. Seja $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$. Portanto também $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ e então, de $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 5)$ deduzimos que $L = \frac{1}{2}(L+5)$, logo $\frac{L}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja $L = 5$.

4. Diga quais das afirmações seguintes são falsas e apresente contra-exemplos.
   Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$.

   (a) Se $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a + \frac{1}{n} \in X$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a + \tfrac{1}{n}) = L$. V

   (b) Se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a + \frac{1}{n} \in X$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a + \tfrac{1}{n}) = L$, então $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$. FALSA

   Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ embora não exista $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (c) Se f é monótona e limitada, então existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$. FALSA

   A função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é monótona e limitada mas não existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (d) Se existir $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que a restrição de f a $X \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ é monótona. FALSA

   A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ tem limite em 0 mas não é monótona em nenhum intervalo da forma $]-\varepsilon, \varepsilon[$; um outro exemplo: a função $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, com $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, tem $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, mas não é monótona em nenhum intervalo da forma $[0, \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$.