Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 **Teste 3** 17 de Dezembro de 2004

1. Estude o domínio e a continuidade da função definida por $f(x)=\begin{cases}\arccos x & \text{se } x\leq 0\\ \dfrac{\log(1+x)}{x\,\cosh x} & \text{se } x>0.\end{cases}$

 Como o domínio da função arccos é $[-1,1]$ e $\frac{\log(1+x)}{x\,\cosh x}$ está definida para todo o $x>0$, o domínio de f é $[-1,+\infty[$.
 A função arccos é contínua, logo f é contínua em $[-1,0[$; para $x>0$ f é um quociente de duas funções contínuas, logo é também contínua. Resta verificar se f é contínua em 0:
 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$;
 para calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\log(1+x)}{x\,\cosh x}$, como $\lim_{x\to 0^+}\log(1+x)=0=\lim_{x\to 0^+}x\,\cosh x$ e estas funções têm derivada em todo o seu domínio, vamos tentar usar a Regra de Cauchy. Calculando

 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\log(1+x))'}{(x\,\cosh x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cosh x+x\,\sinh x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+x)(\cosh x+x\,\sinh x)}=\frac{1}{1\times 1}=1,$$

 podemos concluir que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. Logo, f é descontínua em 0.

2. Usando o Teorema do Valor Médio de Cauchy, mostre que, para todo o número real $x>0$, existe um número real $c\in\,]0,x[$ tal que $\dfrac{\sinh x}{\sin x}=\dfrac{\cosh c}{\cos c}$.
 Seja $x>0$. As funções $\sinh:[0,x]\to\mathbb{R}$ e $\sin:[0,x]\to\mathbb{R}$ são contínuas e deriváveis em $[0,x]$, com $(\sinh t)'=\cosh t$ e $(\sin t)'=\cos t$. Pelo Teorema de Cauchy, existe $c\in]0,x[$ tal que

 $$\frac{\cosh c}{\cos c}=\frac{\sinh x-\sinh 0}{\sin x-\sin 0}=\frac{\sinh x}{\sin x}.$$

3. Deduza a Fórmula de Taylor de ordem 3, com Resto de Lagrange, no ponto $a=0$, da função $x\,e^x$.
 A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\,e^x$ tem derivadas de todas as ordens. Para cada $x\in\mathbb{R}$, a Fórmula de Taylor de ordem 3, com Resto de Lagrange, no ponto 0, é dada por:

 $$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\,x^3+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\,x^4,$$

 para algum c entre 0 e x. Calculemos as 4 primeiras derivadas de f: $f'(x)=e^x+x\,e^x$, $f''(x)=e^x+e^x+x\,e^x$, $f^{(3)}(x)=2e^x+e^x+x\,e^x$ e $f^{(4)}(x)=3e^x+e^x+x\,e^x=4e^x+x\,e^x$. Portanto $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$ e $f^{(3)}(0)=3$, e então

 $$f(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{(4+c)\,e^c}{4!}\,x^4.$$

4. Diga quais das afirmações seguintes são falsas e para essas apresente contra-exemplos.

 (a) Se a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ for contínua e existir $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$ então $f(a)f(b)<0$.
 Falsa: Para a função $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, com $f(x)=x^2$, tem-se $f(0)=0$ embora $f(-1)f(1)=1>0$. Um outro exemplo: a função $\cos:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ tem um zero em $\frac{\pi}{2}$ mas $\cos 0\cos(2\pi)=1>0$.

 (b) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua (em $[a,b]$) e derivável em $]a,b[$. Se existir $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$, então f tem um extremo local em c.
 Falsa: A função $\begin{array}{rcl} f:[-1,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^3\end{array}$ tem derivada nula em 0 mas não tem um extremo local em 0; ela é aliás estritamente crescente.

 (c) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua (em $[a,b]$) e derivável em $]a,b[$ e, para todo o $x\in]a,b[$, $f'(x)>0$, então f é crescente em $[a,b]$.
 Verdadeira

 (d) Sejam $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ funções deriváveis tais que g não se anula em $]a,b[$ e existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Então $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
 Falsa: As funções $f,g:]0,1[\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x$ e $g(x)=x+1$ são deriváveis em $]0,1[$, g não se anula em $]0,1[$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1}=1$ e $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=0$.