Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 4 de Janeiro de 2007

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. (a) Mostre que, se A e B são subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$, então $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

   (b) Indique dois subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, A e B, tais que $A \cap B \neq \emptyset$ e $\sup(A \cap B) < \min\{\sup A, \sup B\}$.

2. Verifique se cada uma das sucessões seguintes é convergente e determine os seus valores de aderência:

   (a) $x_n = \dfrac{\cos(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$; 1 (b) $y_n = \dfrac{n + (-1)^n n + 1}{n+2}$. não é convergente

3. Sejam (a_n) e (b_n) sucessões de números reais positivos tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Mostre que:

   ? (a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

   (b) Se (b_n) é limitada, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \sinh(x) + 4 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Verifique se f é uma função injectiva. não

   (b) Verifique se f é sobrejectiva. Não

   (c) Verifique se f é uma função contínua. É

   (d) Determine os extremos relativos da função f. $x = 2$

5. (a) Deduza a Fórmula de Taylor de ordem 2, com Resto de Lagrange, no ponto $a = 1$, da função definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

   (b) Usando a fórmula anterior, determine uma aproximação para $\sqrt{2}$ com erro inferior a $0,5$ (sabendo que $\sqrt{2} < 1,5$).

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $X =]a, b[$. Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

   (a) $\forall c \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (b) $\exists c \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (c) $\forall c \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (d) $\exists c \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

7. Prove que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f(1) = f'(1) = 1$, então existe $c \in]0, 1[$ tal que $(f \circ f)'(c) = \frac{1}{3}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 — 4 de Janeiro de 2007

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. (a) Mostre que, se A e B são subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$, então $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

   (b) Indique dois subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, A e B, tais que $A \cap B \neq \emptyset$ e $\sup(A \cap B) < \min\{\sup A, \sup B\}$.

2. Verifique se cada uma das sucessões seguintes é convergente e determine os seus valores de aderência:

   (a) $x_n = \dfrac{\cos(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$; 1 (b) $y_n = \dfrac{n + (-1)^n n + 1}{n+2}$. Não é Convergente

3. Sejam (a_n) e (b_n) sucessões de números reais positivos tais que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. Mostre que:

   ? (a) Se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

   (b) Se (b_n) é limitada, então $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \sinh(x) + 4 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Verifique se f é uma função injectiva. Não

   (b) Verifique se f é sobrejectiva. Não

   (c) Verifique se f é uma função contínua. É

   (d) Determine os extremos relativos da função f. $x = 2$

5. (a) Deduza a Fórmula de Taylor de ordem 2, com Resto de Lagrange, no ponto $a = 1$, da função definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

   (b) Usando a fórmula anterior, determine uma aproximação para $\sqrt{2}$ com erro inferior a $0,5$ (sabendo que $\sqrt{2} < 1,5$).

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $X =]a, b[$. Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

   (a) $\forall c \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (b) $\exists c \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (c) $\forall c \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

   (d) $\exists c \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

7. Prove que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f(1) = f'(1) = 1$, então existe $c \in]0, 1[$ tal que $(f \circ f)'(c) = \frac{1}{3}$.