Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 29 de Janeiro de 2007

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \, |x-1| = \frac{1}{n}\}$.
   (a) Prove que o conjunto A é numerável.
   (b) Verifique que A não tem pontos interiores.
   (c) Calcule $\overline{A}$.

2. Seja (x_n) a sucessão definida por recorrência por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (a) Encontre um minorante para o conjunto dos termos da sucessão. 0
   (b) Mostre que (x_n) é decrescente.
   (c) Conclua que (x_n) converge e calcule o seu limite.
   (d) Indique uma expressão para x_n.

3. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\sinh x}$ $= +\infty$
   (b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3\cos x}$. $= -\infty$

4. Considere a função real de variável real

$$f(x) = |\ln|x| + 1|\,.$$

   (a) Indique uma restrição de f a um intervalo (não degenerado) que seja injectiva.
   (b) Determine os intervalos de monotonia de f e os seus extremos locais.

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $f(0) = g(0)$. Prove que se, para todo o $x \geq 0$, $f'(x) \leq g'(x)$, então, para todo o $x \geq 0$, $f(x) \leq g(x)$. Verifique se a afirmação recíproca é verdadeira.

6. (a) Usando a Fórmula de Taylor, prove que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

   (b) Conclua que, se $|x| \leq 1$, então

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\right| < \frac{1}{8}.$$

7. Verifique se as seguintes afirmações sobre uma função $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, com $a < b$, são verdadeiras ou falsas. Caso sejam verdadeiras, enuncie os resultados em que se baseou; caso sejam falsas, indique um contra-exemplo.
   (a) Se f é contínua, então f é derivável em $]a,b[$. F
   (b) Se f é uma função crescente e limitada, então é contínua. F
   (c) Se f é derivável em $]a,b[$ e $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ é crescente, então f' é contínua.