Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 15 de Dezembro de 2006

Duração: 2h

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$.

2. Trace o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   - contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
   - com $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$,
   - se $x \in]-\infty, -3[$, $f'(x) < 0$; se $x \in]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$, então $f'(x) > 0$;
   - $f''(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$ e $f''(x) > 0$ para $x \in]-5, -1[$.

3. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, com f, g deriváveis em todo o $\mathbb{R}$ e tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = h(x)\, f(x)$ e $g'(x) = -h(x)\, g(x)$.

   (a) Mostre que fg é uma função constante.

   (b) Admita que $f(0) > 0$ e $g(0) < 0$. Prove que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cos x$.

   (a) Determine o Polinómio de Taylor P_4 de ordem 4 de f no ponto 0.

   (b) Mostre que, se $x \in [-1, 1]$, então $|f(x) - P_4(x)| < \dfrac{1}{4!}$.

5. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Caso sejam verdadeiras, enuncie os resultados em que se baseou; caso sejam falsas, indique um contra-exemplo.

   (a) Se existir um número real positivo k tal que
   $$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$
   então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

   (b) Se $f, F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ e $G(x) = F(2x)$, então $G'(x) = f(2x)$, para todo o número real x.

   (c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem derivada em todo o $\mathbb{R}$, então a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \sqrt{|f(x)|}$ é derivável em $\mathbb{R}$.

   (d) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em todo o $\mathbb{R}$ e f é par, então f' é ímpar.

   (e) Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 1$.

   (f) Há uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$.