ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

2^a Frequência - $2h30m$ 13/12/2007

---

1. (a) Determine o número real a para o qual a função seguinte é contínua em todo o seu domínio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x}}{ax} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (b) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Diga, justificando, se existe ou não um $x_0 \in [0,3]$ tal que $f(x_0) = \frac{1}{4}$.

2. (a) Determine a função derivada das seguintes funções:

$$\text{(i) } f(x) = x^{2-x^3} \qquad \text{(ii)} f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \\ \tan x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

   (b) Enuncie e demonstre **um** dos seguintes teoremas:

   - Teorema de Rolle
   - Teorema da derivada da função inversa.

3. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Seja f uma função diferenciável e seja g definida por $g(x) = f(x+k)$, k constante. Então $g^{'}(x) = f^{'}(x+k)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x-1}\right)$ existe.

   (c) É possível aplicar o Teorema do Valor Médio de Lagrange à função $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, no intervalo $[-1,1]$.

   (d) O gráfico de qualquer função polinomial de grau 3 tem exactamente um ponto de inflexão.

   (e) Se f é diferenciável num intervalo I contendo c, e se $f^{'}(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo em $x = c$.

   (f) Se o gráfico de uma função contínua f intersecta o eixo dos $x's$ em três pontos, então ele tem pelo menos dois pontos nos quais a recta tangente é horizontal.

   (g) Se $0 < a < b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$.

4. Determine o domínio, os extremos locais, os intervalos de monotonia e as assíntotas , discuta a convexidade e esboce o gráfico da seguinte função:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$