ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Normal (2h30m) 07/JANEIRO/2008

(Este exame tem **6 perguntas** em **duas páginas**)

1. (a) Mostre que $[p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q]$ é uma tautologia.

   (b) Escreva a seguinte frase em linguagem simbólica e na forma de implicação:

   Sai ou chamo a polícia!

   (c) Sejam $f{:}A \rightarrow B$ e $Y \subseteq B$. Defina imagem recíproca $f^{-1}(Y)$ e prove que, para qualquer subconjunto Y de B, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
   Identifique o método de demonstração que utilizou.

2. (a) Prove que são numericamente equivalentes os conjuntos

   $$A = \{x \epsilon \mathbb{N} : x^2 < 15\} \qquad ; \qquad B = \{x \epsilon \mathbb{N} : 2x < 7\}.$$

   (b) Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   i. Todo o subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado superiormente , tem supremo.

   ii. 10 é ponto de acumulação do conjunto $\{2, 8, 16, 32\}$.

   iii. $[0, 3[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

   iv. Se $f{:}A \rightarrow B$ é sobrejectiva e A é um conjunto infinito numerável , então B é infinito numerável.

3. (a) Calcule, se existir:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(2+e^{3n})} \qquad ; \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

   (b) Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2}{(x-4)^2} = +\infty$.

   (c) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \ln(e-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$
   Determine $f^{'}(x)$.

4. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$, derivável em $]0, 1[$ e tal que $f(1) = 4$.
   Prove que existe $c\epsilon]0, 1[$ tal que $f(c) + cf^{'}(c) = 4$.

5. (a) Seja f definida por $f(x) = x^5 - x^3$. Determine os extremos locais e os pontos de inflexão de f. Discuta a concavidade e a convexidade e esboce o gráfico possível de f.

   (b) Enuncie e demonstre **um** dos seguintes teoremas:

- Teorema do Valor Médio de Cauchy.
- Teorema da Derivada da Função Composta.

6. Escreva a Fórmula de Taylor de ordem 3 , com resto de Lagrange, no ponto $a = \pi$, da função definida por $f(x) = \sin x + 1$.