ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Recurso $2h30m$ 28/JANEIRO/2008

---

1. (a) De entre as seguintes frases, assinale as que são proposições, escreva-as em linguagem simbólica e indique o respectivo valor de verdade.
   i. Para todo o x , $x^2 = x$.
   ii. Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
   iii. $x = x$.
   iv. Para x, y, z reais, $xy = xz$ é necessário para que $y = z$.

   (b) Considere a proposição $(\forall x)[p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x, y)]$. Determine
   i. a sua negação;
   ii. uma interpretação para a qual a proposição seja verdadeira.

2. (a) Sejam A e B partes de um conjunto $\boldsymbol{U}$. Demonstre, ***por contradição***, que

$$A \subset B \Rightarrow A \bigcap (U \backslash B) = \emptyset.$$

   (b) Prove que a relação $\subset$ é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de $\boldsymbol{U}$.

3. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e diferenciável. Se f possui derivada nula em todos os pontos $x\epsilon]a, b[$, então f é constante.

   (b) Se A é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, então A tem pelo menos um ponto interior.

   (c) A função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ x + |x - 2| & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

   é invertível.

   (d) Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$ são numericamente equivalentes.

4. (a) Use a definição de limite para provar que não existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$.

   (b) Determine:
   i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$;

   ii)$(fof)'(x)$, sendo f a função definida por $\ln |x + 1|, x \neq -1$.

5. (a) Estude a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$, quanto a domínio, continuidade, extremos locais e assíntotas.

   (b) Seja g a restrição de f ao intervalo $[0, 1]$. Se h for uma função real contínua, definida em $[0, 1]$, tal que $h(0) = -2$ e $h(1) = 0$, prove que

$$\exists c\epsilon[0,1]\text{: } g(c) = h(c).$$

6. (a) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}, a\epsilon X'$. Demonstre **uma** das seguintes afirmações:
   - Se, para todo o $x\epsilon X, x \neq a, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.
   - Se existe a derivada $f'(a)$ então f é contínua no ponto a.

   (b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 com resto de Lagrange, no ponto a, da função f, de classe C^3.