Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

1^a Frequência - $2h$ 25 − 11 − 2008

---

1. (a) Defina *conjunto infinito* e dê um exemplo.

   (b) De entre os seguintes conjuntos indique quais são os numeráveis:

   $$\emptyset \times \mathbb{N};\ \ \mathbb{N} \setminus \{2\}\,;\ \ \mathbb{R} \setminus\,]-\infty, 1[\,;\ \ \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};\ \ \mathbb{R} \times \{0\}\,.$$

   (c) Demonstre o Teorema : *Se $f : X \to Y$ é injectiva e Y é numerável, então X é numerável.*

2. (a) Usando a definição, prove que $\lim\limits_n \frac{2n+1}{n+3} = 2$.
   Mostre que a ordem, a partir da qual todos os termos da sucessão distam de 2 de uma quantidade inferior a $\epsilon = \frac{1}{1000}$, é $n_0 = 4997$.

   (b) Sabendo que $\lim\limits_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, mostre que, para todo o racional r, $\lim\limits_n \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$.

   (c) Calcule os seguintes limites

   $$(i) \lim_n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \qquad \text{(ii)}\lim_n \left(\frac{n^2-4}{n^2}\right)^n \qquad \text{(iii)}\lim_n \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{n!}.$$

3. Considere as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que,

   $$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Justifique a veracidade das seguintes afirmações:

   1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes.
   2. Se $a = \lim\limits_n (x_n)$ e $b = \lim\limits_n (y_n)$, então $a \leq b$.
   3. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] = [a, b]$.

4. (a) Diga o que entende por série de números reais convergente.

   (b) Indique a natureza das séries

   $$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n^2}\right); \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+1}}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

   (c) Enuncie e demonstre uma condição necessária para que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente.