Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Normal (2h30m) 15/01/2009

(Este exame tem **7 perguntas** em **duas páginas**.)

1. (a) Escreva em linguagem simbólica:

    i. 12 ser múltiplo de 4 é condição suficiente para ser múltiplo de 2;

    ii. nenhum m é n.

   (b) Para o seguinte par de expressões proposicionais num domínio U, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação mostrando que não são equivalentes:

$$(\forall y)(\exists x)p(x,y) \qquad ; \qquad (\exists x)(\forall y)p(x,y)$$

2. (a) Sejam X um conjunto e $(A_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de subconjuntos de X. Prove que

$$X \setminus (\cap_{i\in I} A_i) \subset \cup_{i\in I}(X \setminus A_i)$$

   Identifique e descreva o método de demonstração que aplicou.

   (b) Considere definida em $\mathbb{R}$ a seguinte relação:

$$a\rho b \Leftrightarrow \exists m \in {\mathbb{R}_0}^+ : a + m = b$$

    i. Prove que ρ é uma relação de ordem total.

    ii. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto A. Justifique a sua resposta.

3. (a) Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f(x) = m.m.c.(x,a)$.

    i. Para $a = 3$, determine $f(\{1,5\})$ e $f^{-1}(\{4\})$.

    ii. Verifique se f é injectiva.

    iii. Indique um valor de a para o qual f seja sobrejectiva.
    (Obs. $m.m.c.(x,a)$ significa ”mínimo múltiplo comum ...”).

   (b) Prove que o conjunto das rectas do plano, de equação $y = mx, m \in \mathbb{R}$, é infinito. Indique, justificando, se é um conjunto numerável.

4. (a) Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Em cada um dos seguintes casos indique se esta sucessão é convergente, divergente ou se nada se pode afirmar:

   i. (u_n) é crescente;

   ii. suprimidos os primeiros 1000 termos de (u_n), a sucessão obtida fica convergente;

   iii. $(\frac{1}{u_n})$ é divergente;

   iv. (u_n) é uma sucessão de Cauchy.

   (b) Calcule o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \left(n^3\right)^{-\frac{n^3}{3}} \left(3+n^3\right)^{\frac{n^3}{3}}.$$

5. (a) Determine a natureza das séries

$$(i) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^n} \qquad\qquad (ii) \sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}.$$

   (b) Com base na resposta dada à alínea anterior, pode afirmar qual a natureza da série $\sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{(3-2\sqrt{2})^n} + \frac{n^3}{3^n}\right]$? Porquê?

   (c) Determine o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$.

6. Seja f a função de variável real definida por $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

   (a) Mostre que:

   - 0 é um ponto interior
   - 1 é um ponto de acumulação

   do domínio de f.

   (b) Use a definição de limite para provar que não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

   (c) Classifique as descontinuidades de f.

7. Seja f a função de variável real definida por $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   (a) Prove que existe $x_0 \in]1,2[$ tal que $f(x_0) = x_0$.

   (b) Demonstre apenas um dos seguintes teoremas:

   - *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f([a,b])$ é um intervalo.*
   - *A função composta de duas funções contínuas é contínua.*