Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época de Recurso (2h30m) 03/02/2009

(Este exame tem **7 perguntas** em **duas páginas**.)

1. (a) Escreva em linguagem simbólica:

   i. duas rectas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si;

   ii. todo o ser humano necessita de ter trabalho para ser feliz.

   (b) Prove por *contra-exemplo* que o seguinte argumento é falso:

$$(\forall n)(p(n) \Rightarrow q(n)) \wedge (\exists n)p(n) \Rightarrow (\forall n)q(n)$$

2. Sejam X, Y conjuntos não vazios e f uma aplicação de X em Y. Sejam $M \subset X$ e $N \subset Y$.

   (a) Defina $f(M)$ e $f^{-1}(N)$.

   (b) Prove que

   i. $M \subseteq f^{-1}(f(M))$.

   ii. Se $M = f^{-1}(f(M))$, então f é injectiva.

   (c) Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = x + |x - 2|$. Determine $f([-1, 3])$ e $f^{-1}(\{0\})$. Classifique f quanto à sobrejectividade.

3. Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto das funções reais cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Considere definida em $\mathfrak{F}$ a seguinte relação R:

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}, fRg \Leftrightarrow Domf \subseteq Domg \wedge f(x) \leq g(x), \forall x \in Domf.$$

   (a) Prove que R é uma relação de ordem parcial em $\mathfrak{F}$.

   (b) Mostre que R não é uma relação de ordem total em $\mathfrak{F}$.

4. Prove que:

   (a) Se $f : A \to B$ é invertível , então $A \cong B$.

   (b) O conjunto das circunferências do plano, de centro $(0, 0)$ e raio $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, é infinito numerável.

5. (a) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa.

   P_1 - $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado completo.

   P_2 - Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in A$, então x_0 é um ponto de acumulação de A.

   P_3 - O conjunto $\emptyset$ é um conjunto aberto.

   P_4 - O limite da sucessão de termo geral $u_n = n\left((n^2+1)^{\frac{1}{2}} - n\right)$ é igual a $\frac{1}{2}$.

   (b) Demonstre <u>uma</u> das seguintes propriedades:

   i. *Se f e g são funções definidas numa vizinhança de $a \in \mathbb{R}$, tais que g é limitada e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

   ii. *Se uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é convergente, então é limitada.*

6. (a) Defina *soma* de uma série numérica .

   (b) Demonstre: *Se uma série é absolutamente convergente, então é simplesmente convergente.*

   (c) Determine a natureza das séries.

$$(i)\sum_{2}^{\infty}\frac{2^n}{\ln n} \qquad\qquad (ii)\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

   (d) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

7. Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função tal que

$$\forall x, y \in [a,b], a \neq b \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

   Mostre que

   (a) f é contínua em $[a,b]$;

   (b) a equação $f(x) = x$ admite uma só raíz x_0 em $[a,b]$.