Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

1^a Frequência - $2h30m$ $\qquad$ $27 - 11 - 2009$

---

1. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras :

   (a) A afirmação "todos os homens são inteligentes" traduz-se em linguagem simbólica por $h \Rightarrow i$;

   (b) A negação de $\exists x\ \forall y,\ p(x,y) \wedge q(x) \Rightarrow r(x,y) \wedge s(y)$ é $\forall x\ \exists y,\ p(x,y) \wedge q(x) \wedge \sim r(x,y) \vee \sim s(y)$;

   (c) A contra-recíproca da proposição "Vou-me embora se não parares de falar" é "eu ficar é condição necessária para te calares";

   (d) Seja $f : X \to Y$ uma função. A relação ρ em X, definida por $a \rho b \iff f(a) = f(b)$, é uma relação de equivalência.

   (e) Se $f : A \to B$ é sobrejectiva e A é um conjunto infinito numerável, então B é numerável;

   (f) $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado arquimediano .

2. Indique, justificando o valor lógico das seguintes afirmações:

   (a) $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{R}$;

   (b) O conjunto dos majorantes dum conjunto infinito é um conjunto infinito;

   (c) Seja $\mathbb{R}$ ordenado pela relação $\leq$ usual. Pela completude de $\mathbb{R}$ conclui-se que existem o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto $]-3,-1] \cup]0,2]$;

   (d) Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in A$, então x_0 é um ponto de acumulação de A.

3. Seja $S =]-\infty, -2[\bigcup]2,3[\bigcup \{4\} \bigcup]7, +\infty[$. Justificando a sua resposta, mostre que:

   (i) 10 é um ponto interior e 2 é um ponto fronteiro de S;

   (ii) S não é um conjunto aberto.

4. (a) Calcule :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2x+e^{-x}}$ $\qquad$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

   (b) Prove, por definição, que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x) = +\infty.$

5. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uniformemente contínua.

   (a) Prove que existem os limites $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

   (b) Mostre que f pode ser prolongada a uma função uniformemente contínua em $[0,1]$.

6. Calcule a derivada das funções:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$ $\qquad$ (b) $f(x) = x^{e-x^3}$.

7. Sejam $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in]a,b[$. Chama-se derivada simétrica de f em x_0 ao limite, se existir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

   Mostre que se f admite derivadas laterais em x_0, então f tem derivada simétrica em x_0.