Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

Exame Época Normal 14 – 01 – 2010

Duração: - $2h30m$

---

1. (a) Traduza em linguagem simbólica e analise a validade do seguinte argumento: *Ficarei cansado(a) se estudar toda a noite e, se estiver cansado(a), não conseguirei acabar o trabalho de Análise. Logo, para acabar o trabalho, é necessário que não estude toda a noite.*

   (b) Sejam $A, B \subset \mathsf{U}$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se e só se $A \subset B^c$. Caracterize o(s) método(s) de demonstração que utilizou.

   (c) Considere em $\mathbb{R}$ a relação de ordem usual $\leq$, e em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a relação ρ definida por

   $$(a, b)\ \rho\ (c, d) \iff a \leq c \wedge b \leq d.$$

   i. Mostre que ρ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   ii. Determine, para esta relação, um majorante e um minorante do conjunto

   $$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

2. (a) Defina *conjuntos numericamente equivalentes.*

   (b) Prove que é falsa a afirmação *se A e B são conjuntos infinitos então $A - B$ é finito.*

   (c) Seja $A =]-\infty, -2] \bigcup [0, 1] \bigcup [2, +\infty[$.

   i. Mostre que o conjunto A é um conjunto fechado.

   ii. Dê exemplos de um ponto interior e de um ponto de acumulação de A.

3. Das seguintes afirmações indique quais as verdadeiras (justifique) e quais as falsas (dê contra-exemplos):

   (a) As funções f e g definidas por $f(x) = \cos(\arccos x)$ e $g(x) = \arccos(\cos x)$ são iguais.

   (b) Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$, e se g não se anula em $[a, b]$, então existem $x, y \in]a, b[$ tais que

   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(y)}.$$

   (c) Se f é uma aplicação uniformemente contínua em A, então f é contínua em A.

4. (a) Prove que se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f) = \lambda L$.

   (b) Dê exemplo de uma função que tenha uma descontinuidade essencial de 2^{a} espécie.

   (c) Calcule:

   i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3^x}{\log_4 x} - x^{\frac{1}{x}} \right)$.

   ii. Os pontos extremos da função $f(x) = \cosh(2x)$.

   iii. O coeficiente angular da tangente ao gráfico da curva de equação implícita

   $$e^y - 3 + \ln(x + 1) \cos y = 0$$

   no ponto $(0, \ln 3)$;

iv. O polinómio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^{2x}$, no ponto $x = 0$.

5. Sejam f uma função real contínua no intervalo $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ e c, d números reais tais que $c < f(x_0) < d$.

   Prove que existe um real positivo δ tal que $c < f(x) < d$, para todo o $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.