Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL I

Exame- Recurso 29 − 01 − 2010

Duração: - $2h30m$

---

1. Traduza em linguagem simbólica e analise a validade do seguinte argumento: *Todo o estudante que é inteligente sabe falar francês e inglês. Logo, não saber falar francês é condição suficiente para não ser inteligente.*

2. (a) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e seja $S = A + B := \{a + b|\ a \in A,\ b \in B\}$. Prove que existe $supS$ e, ainda, que $supS \leq supA + supB$.

   (b) Prove que $\mathcal{P}(X)$ (conjunto das partes de X) é parcialmente ordenado pela relação $A \subseteq B$.

3. (a) Defina *conjunto infinito numerável.*

   (b) Prove, por contradição, que se $A \subseteq B$ e A é infinito, então B é infinito.

4. Seja $A =]-1, 2[\bigcup [3, +\infty[$.

   (a) Mostre que o conjunto A não é um conjunto aberto. Será A um conjunto fechado?Justifique.

   (b) Dê exemplo de uma ϵ-vizinhança do ponto 0.

   (c) Defina *ponto fronteiro* de A e determine $\delta(A)$.

5. Das seguintes afirmações indique quais as verdadeiras (justifique) e quais as falsas (dê contra-exemplos):

   (a) O conjunto de todos os quadrados, cujo lado tem medida racional, é um conjunto numerável.

   (b) Uma função f é diferenciável em x_0 se e só se x_0 é uma descontinuidade removível da função h, definida por
   $$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

   (c) Se $f'(x) < 0$ em $]a, b[$, então f é convexa em $]a, b[$.

   (d) Se f e g são contínuas em $[a, b]$, então $f + g$ é uniformemente contínua em $[a, b]$.

6. (a) Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^x}{x \ln x}$.

   (b) Prove que $x = 0$ é um extremo local para a função $f(x) = e^x \sin(x^2),\ x \in \mathbb{R}$, e classifique-o.

   (c) Determine a Fórmula de Taylor de ordem 4, com resto de Lagrange, da função $f(x) = \sin x$, no ponto $x = 0$.

7. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.

   (b) Sejam f, g e p funções reais tais que
   $$f''(x) + p(x)f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g''(x) + p(x)g(x) = 0,\ x \in]a, b[.$$

      i. Mostre que $W = f'g - fg'$ é constante em $]a, b[$.

      ii. Prove que: Se $W \neq 0$ e $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $a < x_1 < x_2 < b$, então $g(c) = 0$ para algum $c \in]x_1, x_2[$.