Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 — 13 de Janeiro de 2011

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Considere a afirmação:

$$(\forall X \subseteq \mathbb{R})\ (\exists Y \subseteq \mathbb{R})\ \ X \cup Y = \mathbb{R}\ \wedge\ X \cap Y = \emptyset.$$

   (a) Escreva a sua negação.

   $(\exists X \subseteq \mathbb{R})\ (\forall Y \subseteq \mathbb{R})\ \sim (X \cup Y = \mathbb{R} \wedge X \cap Y = \emptyset)\ \Leftrightarrow\ (\exists X \subseteq \mathbb{R})\ (\forall Y \subseteq \mathbb{R})\ X \cup Y \neq \mathbb{R} \vee X \cap Y \neq \emptyset.$

   (b) Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa.

   A afirmação é verdadeira. Para cada subconjunto X de $\mathbb{R}$, o seu complementar

$$X^c = \{y \in \mathbb{R} \mid y \notin X\}$$

   verifica, pela forma como foi definido, as igualdades $X \cup X^c = \mathbb{R}$ e $X \cap X^c = \emptyset$.

2. (a) Usando o Teorema de Lagrange, prove que, qualquer que seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$.

   Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consideremos a função sin restrita ao intervalo $[0, x]$ caso x seja positivo, ou restrita ao intervalo $[x, 0]$ caso x seja negativo. Seja f tal função. A função f é contínua e derivável em todo o domínio, com $f'(z) = \cos z$, para todo o z. Logo, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe c entre 0 e x tal que

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = \cos c.$$

   Então, atendendo a que $|\cos c| \leq 1$, obtemos $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$.

   (b) Seja x_1 um número real estritamente positivo. Considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_{n+1} = |\sin(x_n)|$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   i. Prove que a sucessão é limitada.

   Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$, pois $x_1 > 0$ e, para $n > 1$, $x_n = |\sin(x_{n-1})| \geq 0$. Por outro lado, se $n > 1$, então $x_n \leq 1$. Logo, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \max\{x_1, 1\}$.

   ii. Prove que a sucessão é decrescente.

   Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n \neq 0$, então $\dfrac{x_n + 1}{x_n} = \left|\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right| \leq 1$ pelo resultado da alínea (a). Se $x_n = 0$, então $x_{n+1} = |\sin x_n| = 0 \leq x_n$. Logo, a sucessão é decrescente.

   iii. Calcule o seu limite.

   A sucessão é convergente, pois é limitada e monótona. Seja $L = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Como $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, também $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = L$. Então, como a função sin é contínua, e a função módulo é também contínua,

$$L = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} |\sin(x_n)| = |\sin(L)|.$$

   Para $L = 0$ tem-se $L = |\sin L|$. Vejamos que este é o único valor possível. Para termos $L = |\sin L|$, necessariamente $L \in [0, 1]$, logo $\sin L \geq 0$. A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, com

$f(x) = x - \sin x$ tem derivada $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ para todo o $x > 0$, sendo por isso estritamente crescente. Portanto 0 é o seu único zero, e então podemos concluir que $L = 0$.

3. Usando a definição, prove que $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$.

Queremos provar que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in [0, +\infty[\ |x-1| < \delta \ \Rightarrow\ |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon.$$

Notemos que $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x - 1$. Então, se $|x-1| < \delta$ podemos concluir que

$$|\sqrt{x} - 1| = \left|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{x}+1} \leq \delta, \quad \text{pois } \sqrt{x}+1 \geq 1.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Considerando $\delta = \varepsilon$ obtemos que, se $|x-1| < \delta$, então $|\sqrt{x}-1| < \delta = \varepsilon$.

4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x + \cosh(x))}{x}$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+\cosh(x)) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

vamos usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x+\cosh(x)))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1+\sinh(x)}{x+\cosh(x)}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sinh(x)}{x+\cosh(x)}.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\sinh(x)) = \lim_{x\to+\infty} (x+\cosh(x)) = +\infty,$$

usamos novamente a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\sinh(x))'}{(x+\cosh(x))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(x)}{1+\sinh(x)}.$$

Usando novamente a Regra de Cauchy obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\cosh(x))'}{(1+\sinh(x))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1.$$

Logo, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\cosh(x))}{x} = 1$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

Atendendo a que

$$\lim_{x\to 0} (x^2 \cos\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0,$$

vamos tentar usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos\frac{1}{x})'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos\frac{1}{x} + x^2(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} (1+x)(2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}).$$

Como este limite não existe, pois não existe $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$, nada podemos concluir sobre o nosso primeiro limite. Poderemos no entanto calcular separadamente $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)}$. Se este limite existir, e for igual a 0, então o limite da função que queremos calcular é igual a 0, por ser o limite do produto de uma função com limite 0 por uma função limitada.

Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)}$, e uma vez que $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$, vamos tentar usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}(2x)(1+x) = 0.$$

Então $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)} = 0$ e também $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = 0$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ \cos(\pi x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em todos os pontos do domínio. Se o não for, indique os tipos de descontinuidade.

A função é contínua em todo o $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, por ser composição de funções contínuas. Vejamos se é contínua em 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1;$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\pi x) = \cos 0 = 1.$$

Logo, f é contínua em 0 e portanto contínua em todo o seu domínio.

(b) Determine a função derivada de f.

$$\text{se } x < 0,\ f'(x) = (\cos(\pi x))' = -\pi \sin(\pi x);$$
$$\text{se } x > 0,\ f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}.$$

Para verificar se f tem derivada em 0 temos que calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^{-x}}{1} = -1 \qquad \text{(pela Regra de Cauchy)}$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(\pi x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\pi\sin(\pi x)}{1} = 0 \qquad \text{(pela Regra de Cauchy).}$$

Logo, como estes limites não são iguais, f não tem derivada em 0.

(c) A função f é injectiva? Justifique.

A função f não é injectiva, pois, por exemplo, $f(-2) = \cos(-2\pi) = 1 == f(0)$.

(d) Determine os extremos relativos da função.

Estudemos em primeiro lugar os zeros da função derivada:

$$\text{se } x < 0,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}^- = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$$
$$\text{se } x > 0,\ f'(x) = -e^{-x} < 0 \text{ para todo o } x.$$

Para $x > 0$ $f'(x) < 0$, logo a função é estritamente decrescente, e para $x < 0$ o sinal de $f'(x)$ alterna entre positivo e negativo. [Na prova deveriam aqui juntar quadro de variação.] Logo f tem máximos relativos em todos os números inteiros negativos pares (onde toma o valor 1), e tem mínimos relativos em todos os inteiros negativos ímpares (onde toma o valor -1). Em 0 tem um máximo relativo.

(e) Calcule $f([-1,1])$.

Como a função é contínua, $f(-1) = \cos(-\pi) = -1$, entre $[-1,0]$ a função é crescente atingindo um máximo em 0, sendo $f(0) = 1$, e a função é decrescente em $[0,1]$, sendo $f(1) = \frac{1}{e}$, $f([-1,1]) = [-1,1]$.

6. Para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{\sin x}$:

(a) Deduza a Fórmula de Taylor, com Resto de Lagrange, de ordem 2 da função g no ponto 0.

Precisamos em primeiro lugar de qualquer das três primeiras derivadas de g:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \cos x\, e^{\sin x} \\
g''(x) &= -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} \\
g'''(x) &= -\cos x\, e^{\sin x} - \sin x\, \cos x\, e^{\sin x} - 2\cos x\, \sin x\, e^{\sin x} + \cos^3 x\, e^{\sin x} \\
&= \cos x\, e^{\sin x}(-1 - 3\sin x + \cos^2 x)
\end{aligned}$$

Logo $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$ e $g''(0) = 1$. Obtemos então a Fórmula de Taylor pretendida:

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{-1 - 3\sin c + \cos^2 c}{6} \cos c\, e^{\sin c} x^3,$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e c é um valor entre x e 0.

(b) Usando a alínea anterior mostre que, para todo o $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$e^{\sin x} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Estudemos o sinal do Resto de Lagrange de ordem 2:

$$R(x) = \frac{-1 - 3\sin c + \cos^2 c}{6} \cos c\, e^{\sin c} x^3$$

para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Como $x^3 \geq 0$, $\cos c \geq 0$ e $e^{\sin c} \geq 0$, o Resto de Lagrange será negativo se, e só se, $-1 - 3\sin c + \cos^2 c$ o for. Consideremos a função h definida por $h(t) = -1 - 3\sin t + \cos^2 t$. Temos $h(0) = 0$ e, para $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$h'(t) = -3\cos t - 2\cos t\, \sin t < 0.$$

Ou seja, a função h é estritamente decrescente neste intervalo e portanto toma valores negativos quando $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo, de $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R(x)$, como $R(x)$ é menor ou igual a 0 conclui-se que

$$g(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$