Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 12 de Janeiro de 2007

Exame Suplementar (para notas superiores a 15 valores)

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função em $X = \,]a,b[\,$, com $a < b$. Interprete cada uma das condições seguintes.
   (a) $\exists c \in X \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;
   (b) $\forall c \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;
   (c) $\exists c \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;
   (d) $\exists c \in X \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \varepsilon$;
   (e) $\forall c \in X \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, com $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ estritamente crescente.
   (a) Prove que existe um único $\alpha \in]a,b[$ tal que $f(\alpha) = 0$. Mostre que, se $x \in]\alpha, b[$, então $f'(x) > 0$.
   (b) Considere a sucessão definida por $x_1 = b$ e $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.
      i. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < x_{n+1} < x_n$.
      ii. Prove que a sucessão (x_n) converge para α.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num ponto a. Prove que, se f é derivável nesse ponto, então existe no máximo uma recta que coincide com o gráfico de f uma infinidade de vezes em qualquer intervalo aberto da forma $]a - \delta, a + \delta[$, com $\delta > 0$.
   Dê exemplo de uma função não linear para a qual essa recta exista.

4. Mostre que as seguintes condições são equivalentes, para um subconjunto X de $\mathbb{R}$:
   (i) Se $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I}]a_i, b_i[$, então existe um subconjunto finito J de I tal que $X \subseteq \bigcup\limits_{j \in J}]a_j, b_j[$;
   (ii) X é fechado e limitado.