Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 27 de Janeiro de 2011

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Considere a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

   (a) Determine os minorantes do conjunto $A = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid 2 \in S\}$.
   Os minorantes de A, ou seja, os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que estão contidos em todos os elementos de A, são $\emptyset$ e $\{2\}$.

   (b) Verifique se $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ é um majorante do conjunto $B = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \notin S \ \wedge \ 2 \notin S\}$.
   $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ é majorante de B uma vez que, para todo o subconjunto S de $\mathbb{N}$,

$$S \in B \ \Rightarrow \ 1 \notin S \ \Rightarrow \ S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

2. (a) Calcule: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x^2 + x)}{x^2}$.
   Como $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sinh(x^2 + x) = \sinh 0 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$, vamos usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sinh(x^2 + x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x^2 + x)(2x + 1)}{2x} = \infty,$$

   atendendo a que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cosh(x^2 + x)(2x + 1) = \cosh 0 \times 1 = 1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} 2x = 0$ e $\displaystyle\frac{\cosh(x^2 + x)(2x + 1)}{2x}$ é negativo quando $x < 0$ e positivo quando $x > 0$. Ou seja

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sinh(x^2 + x)}{x^2} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x^2 + x)}{x^2} = +\infty.$$

   (b) Usando a definição de limite, mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x}{2} = 1$.
   Queremos provar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x - 2| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{x}{2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

   Seja $\varepsilon > 0$. Como $\displaystyle\left| \frac{x}{2} - 1 \right| = \frac{|x - 2|}{2}$, tomando $\delta = 2\varepsilon$, que ainda é maior do que zero, podemos concluir que

$$0 < |x - 2| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{x}{2} - 1 \right| = \frac{|x - 2|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

   (c) Considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

      i. Mostre, por indução, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente por 2.
      Verifiquemos, por indução sobre n, que $x_n < 2$:
      - $x_1 < 2$;
      - se $x_k < 2$, então $x_{k+1} = 1 + \dfrac{x_k}{2} < 1 + \dfrac{2}{2} = 2$.

      ii. Verifique que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente.
      Poderemos concluir que a sucessão (x_n) é convergente se for crescente, uma vez que já sabemos que é limitada superiormente: para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{2} - x_n = 1 - \frac{x_n}{2} > 1 - \frac{2}{2} = 0,$$

      uma vez que, pela alínea anterior, $x_n < 2$.

iii. Calcule o limite da sucessão.

Seja $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Como $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, também $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = L$. Então, da igualdade $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$ podemos concluir que $L = 1 + \frac{L}{2}$, logo $\frac{L}{2} = 1$ e então $L = 2$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + \cos^2 x) & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em todos os pontos do domínio. Se o não for, indique os tipos de descontinuidade.

A função é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ por estar definida nestes intervalos abertos como composição de funções contínuas. Para verificar se f é contínua em 0 estudamos o limite lateral

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Para provar que este limite não existe basta considerar duas sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a convergir para zero, por valores negativos, tais que as sucessões $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ têm limites diferentes. Sejam

$$x_n = -\frac{1}{2n\pi} \text{ e } y_n = -\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então $f(x_n) = \sin(-2n\pi) = 0$ e $f(y_n) = \sin(-(2n\pi + \frac{\pi}{2})) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Logo a sucessão $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, enquanto que $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para -1. A função é portanto descontínua em zero, tendo neste ponto uma descontinuidade essencial de segunda espécie.

(b) Determine a função derivada de f.

Se $x > 0$,

$$f'(x) = (\ln(x + \cos^2 x))' = \frac{(x + \cos^2 x)'}{x + \cos^2 x} = \frac{1 - 2\cos x \sin x}{x + \cos^2 x}.$$

Se $x < 0$,

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}.$$

A função f não tem derivada em 0 uma vez que não é contínua nesse ponto. Logo, a derivada da função f está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2\cos x \sin x}{x + \cos^2 x} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

4. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Seja k um número real. Aplicando o Teorema de Rolle à função $g(x) = \sin x\, e^{-kx}$, prove que existe $c \in]0, \pi[$ tal que $\cos c = k \sin c$.

Apliquemos o Teorema de Rolle à função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin x\, e^{-kx}$. Como g é contínua em $[0, \pi]$ e derivável em $]0, \pi[$ e $g(0) = \sin 0\, e^0 = 0 = \sin \pi\, e^{-k\pi} = g(\pi)$, concluímos que existe $c \in]0, \pi[$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(x) = \cos x\, e^{-kx} - k \sin x\, e^{-kx}$ deduzimos que $\cos c\, e^{-kc} = k \sin c e^{-kc}$. Logo, atendendo a que e^{-kx} nunca se anula, $\cos c = k \sin c$.

5. (a) Determine a Fórmula de Taylor de ordem n com Resto de Lagrange, no ponto zero, da função $f(x) = e^x$.

   Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Então $f(0) = 1$ e $f^{(n)}(0) = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Logo a Fórmula de Taylor será:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

   para algum c entre 0 e x.

   (b) Usando a fórmula anterior, e sabendo que $e < 3$, prove que

$$\frac{1}{2160} < \frac{1}{e} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} < \frac{1}{720}.$$

   Fazendo $x = -1$ e $n = 5$ na fórmula anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{e} &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + R_5(-1)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{e^c}{6!}(-1)^6,\end{aligned}$$

   para algum c entre -1 e 0. Então $e^c \in]\frac{1}{e}, 1[$ e portanto, atendendo a que $e < 3$, obtemos

$$\frac{1}{2160} = \frac{1}{3 \times 6!} < \frac{1}{e \times 6!} < \frac{e^c}{6} < \frac{1}{6!} = \frac{1}{720},$$

   e daqui segue o resultado pretendido.

6. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ nm = 1$.

   Falsa: Se, por exemplo, $n = 2$, o produto de n por qualquer número natural é um número natural par, e portanto diferente de 1.

   (b) $\forall A \subseteq \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ [x-1, x+2] \subseteq A \Rightarrow x$ pertence ao interior de A.

   Verdadeira: O ponto x pertence ao interior de A se existir um intervalo aberto, ao qual x pertença, contido em A. De $[x-1, x+2] \subseteq A$ podemos concluir que $]x-1, x+1[\subseteq A$ e daí concluir que x é ponto interior de A.

   (c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $a \in \mathbb{R}$, então existe $f'(a)$.

   Falsa: por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = |x|$, é contínua em 0 mas não tem derivada em zero, pois as suas derivadas laterais são diferentes:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1.$$

   (d) Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente de números reais, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e limitada.

   Falsa: por exemplo a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ não é monótona mas converge para 0.

   (e) $(\forall X \subseteq \mathbb{R})\ \mathbb{N} \subseteq X \ \Rightarrow\ \{1\} \in X$.

   Falsa: O conjunto X é um conjunto de números reais, logo não tem como elemento $\{1\}$, que não é um número real mas um conjunto que tem como único elemento o número 1.