Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 — 20 de Outubro de 2010

Teste 1 **Nome do aluno:**

1. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

   (a) $(\sim (r \Rightarrow s)) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow \sim s)$.
   Falsa, pois quando s e r são verdadeiras, $(\sim (r \Rightarrow s))$, que é equivalente a $(r \wedge \sim s)$, é falsa, e $(\sim r \Rightarrow \sim s)$, que é equivalente a $(s \Rightarrow r)$, é verdadeira.

   (b) $(\forall n \in \mathbb{Z})\ (\exists m \in \mathbb{Z})\ :\ n \leq m$.
   Verdadeira: para cada $n \in \mathbb{Z}$, $m = n+1 \in \mathbb{Z}$ e $n \leq m$.

   (c) $(\exists n \in \mathbb{Z})\ (\forall m \in \mathbb{Z})\ :\ n \leq m$.
   Falsa: a condição afirma que $\mathbb{Z}$ tem elemento mínimo, o que é falso.

   (d) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n < 0\}) \cup \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \geq 0\})$.
   Falsa: por exemplo, o conjunto $\{-1, 1\}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, mas, por ter simultaneamente elementos positivos e negativos, não pertence a $\mathcal{P}(\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n < 0\})$ nem a $\mathcal{P}(\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \geq 0\})$.

2. Considere a função $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$

   (a) Verifique se f é injectiva.
   A função f não é injectiva, pois, por exemplo, $f(0,1) = f(1,0) = 1$ e $(1,0) \neq (0,1)$.

   (b) Verifique se f é sobrejectiva.
   f é sobrejectiva: para cada $z \in \mathbb{R}$, existe, por exemplo, $(z, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $f(z, 0) = z + 0 = z$.

   (c) Calcule $f^{-1}(\{0\})$.
   $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x + y = 0\} = \{(x, -x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.

3. Considere no conjunto $\mathbb{N}$ a relação de ordem ρ definida por $n \rho m$ se n divide m, para $n, m \in \mathbb{N}$. Seja $A = \{30, 45, 150\}$.

   (a) Determine o conjunto dos minorantes de A.
   Um número natural n será minorante de A se dividir todos os elementos de A. Calculando:

   os divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,

   os divisores de 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45,

   e os divisores de 150: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150,

   concluímos que o conjuntos dos minorantes de A é $\{1, 3, 5, 15\}$.

   (b) Verifique se A tem mínimo.
   O conjunto A tem ínfimo, 15, que não pertence a A, logo A não tem mínimo.

4. Mostre, usando a definição de conjunto numerável, que o conjunto $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ é numerável.
   O conjunto $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ será numerável se existir uma aplicação bijectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1\}$. Definindo $f(n,i) = \begin{cases} 2n & \text{se } i = 0 \\ 2n - 1 & \text{se } i = 1 \end{cases}$ obtemos uma função bijectiva. De facto, se $f(n,i) = f(m,j)$, então $i = j = 0$ e $2n = 2m$ ou $i = j = 1$ e $2n - 1 = 2m - 1$, donde se conclui que $n = m$ e então f é injectiva; f é também sobrejectiva pois, dado $k \in \mathbb{N}$, se k for par então $k = f(\frac{k}{2}, 0)$ e se k for ímpar $k = f(\frac{k+1}{2}, 1)$.