Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 17 de Novembro de 2010

Teste 1

1. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

   (a) $(r \vee s) \;\Rightarrow\; (\sim r \Rightarrow s)$.
   Verdadeira: Se $r \vee s$ e $\sim r$, então necessariamente s é válida. Pode também verificar-se através da tabela de verdade (...).

   (b) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{N})\ (\exists z \in \mathbb{N}) \;:\; z > x + y$.
   Verdadeira: Dados naturais quaisquer x, y, o número natural $z = x + y + 1$ verifica a condição $z > x + y$.

   (c) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists z \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{N}) \;:\; z > x + y$.
   Falsa, isto é verifica-se: $(\exists x \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{N}) \;:\; z \leq x + y$. De facto, dado por exemplo $x = 1$ e z qualquer, tomando $y = z$ obtemos $z \leq 1 + z$.

   (d) $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \{A \times B \;;\; A \subseteq \mathbb{N} \text{ e } B \subseteq \mathbb{N}\}$.
   Falsa: por exemplo, o conjunto $\{(1,2),(2,1)\}$ é um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que não é da forma $A \times B$, para A, B subconjuntos de $\mathbb{N}$.

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(a,b) = ab$.

   (a) A função g é injectiva?
   Não, pois, por exemplo, $(1,0) \neq (2,0)$ mas $g(1,0) = g(2,0) = 0$.

   (b) É sobrejectiva?
   Sim: $(\forall y \in \mathbb{R})\ (\exists (1,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \;:\; g(1,y) = 1 \times y = y$.

   (c) Calcule $g(\,[-1,0] \times [-1,0]\,)$.
   Se $-1 \leq a \leq 0$ e $-1 \leq b \leq 0$, então $0 \leq ab \leq 1$, logo $g(\,[-1,0] \times [-1,0]\,) \subseteq [0,1]$. Reciprocamente, se $0 \leq y \leq 1$, então $(-1,-y) \in [-1,0] \times [-1,0]$ e $y = g(-1,-y)$. Em conclusão, $g(\,[-1,0] \times [-1,0]\,) = [0,1]$

   (d) Calcule $g^{-1}(\{0\})$.
   $g^{-1}(\{0\}) = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;;\; ab = 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;;\; a = 0 \text{ ou } b = 0\}$.

3. Considere no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a relação de ordem $\leq$ definida por $(n,m) \leq (i,j)$ se $n \leq i$ e $n + m \leq i + j$, para $n, m, i, j \in \mathbb{N}$.

   (a) Verifique que $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   $\leq$ é reflexiva: dado $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \leq n$ e $n + m \leq n + m$, logo $(n,m) \leq (n,m)$.
   $\leq$ é anti-simétrica: se $(n,m) \leq (i,j)$ e $(i,j) \leq (m,n)$, então de $n \leq i \leq n$ segue que $n = i$, e de $n + m \leq i + j \leq n + m$, como $n = i$, conclui-se que $m \leq j \leq m$, logo $m = j$.
   $\leq$ é transitiva: se $(n,m) \leq (i,j)$ e $(i,j) \leq (k,l)$, então de $n \leq i \leq k$ conclui-se que $n \leq k$, e de $n + m \leq i + j \leq k + l$ conclui-se que $n + m \leq k + l$, logo $(n,m) \leq (k,l)$.

   (b) $\leq$ é um ordem total?
   Não é uma ordem total porque há pares de elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que não estão relacionados por $\leq$. Por exemplo, $(2,1) \not\leq (1,3)$ porque $2 \not\leq 1$, e $(1,3) \not\leq (2,1)$ porque, embora $1 \leq 2$, $1 + 3 \not\leq 2 + 1$.

(c) Determine os minorantes do conjunto $X = \mathbb{N} \times \{5\}$ e verifique se X tem mínimo.

Um elemento (n, m) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é minorante de X se para todo o elemento de X, isto é da forma $(k, 5)$ para algum número natural k, $n \leq k$ e $n + m \leq k + 5$. Como $(1, 5) \in X$, necessariamente $n = 1$. Logo, o conjunto dos minorantes de X é

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}.$$

Claramente $(1, 5)$ é o maior dos minorantes de X, logo é o ínfimo de X. Como pertence a X, é o mínimo de X.

4. Mostre que o conjunto $Y = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x| = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ é numerável.

Observação: O enunciado que eu tinha em mente era:

5. Mostre que o conjunto $Y = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x = |\frac{1}{n}|, n \in \mathbb{N}\}$ é numerável.

Resolução de 4:

O conjunto Y é igual a $\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Logo, a função $f : \mathbb{N} \to Y$ definida por $f(n) = \frac{1}{n}$ é uma bijecção de $\mathbb{N}$ em Y, mostrando que Y é numerável.

Resolução de 5:

O conjunto Y é igual a$\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. A função $g : \mathbb{N} \to Y$ definida por $g(n) = \frac{1}{2n}$ se n par e $g(n) = -\frac{1}{2n-1}$ se n ímpar é uma bijecção de $\mathbb{N}$ em Y, o que mostra que Y é numerável.