Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 | 17 de Novembro de 2010

Teste 2 **Nome do aluno:**

1. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x| = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) A não tem pontos interiores. Justifique esta afirmação.

   (b) Prove que 0 pertence ao fecho de A.

2. Verifique se a sucessão $(z_n)_n$, definida por $z_n = \dfrac{1+\cos n}{n^2}$, converge, e, em caso afirmativo, calcule o seu limite.

3. Seja $x_1 = 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{2^n}$.

   (a) Prove, por indução sobre n, que $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{x_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}$. Conclua que a sucessão $(x_n)_n$ é limitada.

   (b) Prove que $(x_n)_n$ é monótona.

   (c) Caso seja convergente, determine o seu limite.

4. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{x+2}$. Mostre, usando a definição, que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.