Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 17 de Novembro de 2010

Teste 2

1. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x| = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) A não tem pontos interiores. Justifique esta afirmação.

   O conjunto A está contido no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, logo não contém nenhum intervalo aberto, e por isso não tem nenhum ponto interior.

   (b) Prove que 0 pertence ao fecho de A.

   Seja $\varepsilon > 0$. Pela Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Então $\frac{1}{p} \in]-\varepsilon, \varepsilon[\cap A$, logo este conjunto é não vazio e por isso $0 \in \overline{A}$.

2. Verifique se a sucessão $(z_n)_n$, definida por $z_n = \dfrac{1 + \cos n}{n^2}$, converge, e, em caso afirmativo, calcule o seu limite.

   Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, logo $0 \leq 1 + \cos n \leq 2$. Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   $$0 \leq \frac{1 + \cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

   A sucessão $(\frac{1}{n})_n$ converge para 0 (novamente pela Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$), logo também $(\frac{2}{n})_n$ converge para 0, e então, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, concluímos que $(z_n)_n$ converge para 0.

3. Seja $x_1 = 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{2^n}$.

   (a) Prove, por indução sobre n, que $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{x_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}$. Conclua que a sucessão $(x_n)_n$ é limitada.

   A desigualdade é válida para $n = 1$, pois $\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}$. Suponhamos que a desigualdade é válida para n, e provemos a sua validade para $n + 1$: uma vez que $x_n \geq 0$,

   $$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{x_n}{4} = \frac{x_{n+1}}{2};$$

   além disso, de $\frac{x_n}{2} \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ conclui-se que

   $$\frac{x_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2},$$

   e a desigualdade fica provada. Desta desigualdade resulta, por exemplo, que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   $$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2},$$

   logo a sucessão $(x_n)_n$ é limitada.

   (b) Prove que $(x_n)_n$ é monótona.

   Para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   $$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2^n} - x_n = \frac{1}{2^n} - \frac{x_n}{2} \leq 0,$$

   uma vez que, pela alínea anterior, $\frac{1}{2^n} \leq \frac{x_n}{2}$.

(c) Caso seja convergente, determine o seu limite.

A sucessão é monótona e limitada, logo convergente. Seja $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Então também $L = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1}$. Logo, da igualdade $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2^n}$, e atendendo a que existe $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}$, e é igual a 0, obtemos

$$L = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{2} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{L}{2} + 0,$$

logo $L = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{x+2}$. Mostre, usando a definição, que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Queremos provar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ :\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \ 0 < |x| < \delta\ \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x+2}\right| < \varepsilon.$$

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, se $|x| < \delta$, então $|\frac{x^2}{x+2}| = x^2 \times |\frac{1}{x+2}| < \delta^2 \times |\frac{1}{x+2}|$. Para valores de x próximos de 0, podemos limitar o valor de $|\frac{1}{x+2}|$. Por exemplo, se $\delta < 1$, então $|x+2| > 1$, logo $|\frac{1}{x+2}| < 1$. Podemos então concluir que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{1, \varepsilon\} > 0$ tal que:

$$|x| < \delta\ \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x+2}\right| = x^2 \times \left|\frac{1}{x+2}\right| < \delta^2 \leq \delta \leq \varepsilon.$$