Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 15 de Dezembro de 2010

Teste 3

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

   (a) Verifique se f é uma função contínua.

   Em $a \neq 0$, a função f é contínua porque é composição de funções contínuas. Em $a = 0$ temos

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

   pois $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$. Logo f é uma função contínua.

   (b) Calcule a função derivada de f.

   Para $x \neq 0$,

   $$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}}(-x^{-2})' = e^{-\frac{1}{x^2}} 2x^{-3} = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}.$$

   Poderemos concluir que existe $f'(0)$ se existir $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Calculemos em primeiro lugar

   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = (\text{fazendo } t = \tfrac{1}{x})$$

   $$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2e^{-t^2}}{\frac{1}{t^3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = (\text{usando a Regra de Cauchy})$$

   $$= \lim_{t\to+\infty} \frac{6t^2}{2te^{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t}{e^{t^2}} = (\text{usando novamente a Regra de Cauchy})$$

   $$= \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{2te^{t^2}} = 0.$$

   Como a função f' é ímpar, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ e portanto f tem derivada em 0, igual a 0.

   Ou, em alternativa, calculamos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ usando directamente a Regra de Cauchy:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \ (\text{usando a Regra de Cauchy})$$

   $$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

   pois $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

2. Para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x \sin x$:

   (a) Deduza a Fórmula de Taylor de ordem 4 da função g no ponto 0.

   Calculemos em primeiro lugar as cinco primeiras derivadas de g:

   $g'(x) = \sin x + x \cos x$,

   $g''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$,

   $g^{(3)}(x) = -2 \sin x - \sin x - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x$,

$g^{(4)}(x) = -3\cos x - \cos x + x\sin x = -4\cos x + x\sin x$,
$g^{(5)}(x) = 4\sin x + \sin x + x\cos x = 5\sin x + x\cos x$.
Então $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2$, $g^{(3)}(0) = 0$ e $g^{(4)}(0) = -4$. A Fórmula de Taylor de ordem 4 da função g em 0 é a seguinte:

$$g(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{g^{(5)}(c)}{5!}x^5 = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{5\sin c + c\cos c}{5!}x^5,$$

onde c é um número real entre 0 e x.
Ou, em alternativa, poderíamos apresentar a Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal:

$$g(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + r(x), \text{ onde } \lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^4} = 0.$$

(b) Usando a alínea anterior mostre que, para todo o $x \in [0,1]$,

$$x^2 - \frac{x^4}{6} \leq g(x) \leq x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{20}.$$

Seja $x \in [0,1]$. A desigualdade

$$x^2 - \frac{x^4}{6} \leq g(x)$$

resulta do facto do Resto de Lagrange de ordem 4 de g

$$\frac{5\sin c + c\cos c}{5!}x^5$$

ser um valor não negativo, uma vez que, se $c \in [0,1] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin c \geq 0$ e $\cos c \geq 0$, logo $5\sin c + c\cos c \geq 0$.
A desigualdade

$$g(x) \leq x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{20}$$

ficará provada se verificarmos que o Resto de Lagrange de ordem 4 é menor ou igual a $\frac{x^5}{20}$. Como $5\sin c + c\cos c < 5 + 1 = 6$, vem

$$\frac{5\sin c + c\cos c}{5!}x^5 \leq \frac{6}{5!}x^5 = \frac{x^5}{20}.$$

3. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(a) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua e existir $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 1$, então $f(a) < 1 < f(b)$.
Falsa: por exemplo, para $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ tem-se $f(0) = 1$ mas $f(-1) = 2$ não é menor ou igual a 1.

(b) Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada em $]a,b[$. Se existir $c \in]a,b[$ tal que $f''(c) = 0$, então f tem um ponto de inflexão em c.
Falsa: por exemplo, se considerarmos $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mas f não tem ponto de inflexão em 0, pois f é convexa em todo o seu domínio.

(c) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for derivável em $a \in X \cap X'$, então f é contínua em a.
Verdadeira: se existir $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, então

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{x\to a}(x-a) =$$

$$= f'(a) \times 0 = 0,$$

isto é $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(d) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em X tal que $f' = g'$, então existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in X$, $f(x) = g(x) + k$.

Falsa: sejam $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{|x|}{x}$, isto é $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ se $x < 0$ e $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ se $x > 0$. Então $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = g'(x)$ mas a diferença entre as duas funções não é constante: se $x < 0$, $f(x) - g(x) = 1$ e se $x > 0$ $f(x) - g(x) = -1$.

(Observação: Se X fosse um intervalo, a afirmação seria verdadeira.)