Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Análise Infinitesimal II
16 de Julho de 2002

Duração: 2 horas 30 minutos
Justifique convenientemente as suas respostas!

I

1. Sejam f e g duas funções definidas num intervalo aberto I e deriváveis em $x_0 \in I$. Prove que
$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

2. Seja $f : I \rightarrow R$ uma função derivável no intervalo aberto I. Prove que se
$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I$$
então f é uma função não decrescente.
Sugestão: Use o Teorema do Valor Médio de Lagrange .

3. Determine os polinómios de Taylor de grau 1 e 2 da função f definida por $f(x) = e^x$, no ponto zero e represente-os graficamente. Represente conjuntamente as três funções.

II

1. Prove, usando a definição, que se f e g são funções limitadas em $[a, b]$ e
$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b] \qquad \text{então} \qquad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

2. Mostre que
$$e \leq \int_1^e \frac{e^t}{t}dt \leq e^e - e.$$
Sugestão: Use um resultado para integrais, análogo ao resultado anterior.

3. Considere a função F definida por
$$\begin{array}{rcl} F: & [1,5] & \rightarrow R \\ & x & \rightarrow \begin{cases} c - \int_1^x \frac{e^t}{t}dt & , \text{ se } x \in [1, e] \\ k(x-e) & , \text{ se } x \in]e, 5] \end{cases} \end{array}$$
onde $c = \int_1^e \frac{e^t}{t}dt$ e k é tal que F é derivável em $x = e$.
   (a) Determine k e $F'(x)$, justificando devidamente.
   (b) Faça um esboço do gráfico de F. Como não sabe determinar o valor de c use apenas a informação contida na pergunta 2.

4. Calcule
$$a) \int \frac{1}{4\cos^2 x - \sin^2 x}dx \qquad b) \int_1^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx.$$

5. Podíamos contar uma história com Reis, Principes e outras figuras menos importantes envolvidas numa discussão sobre a forma de calcular o volume dum <u>ovo</u>.

   Um dos processos seria partir o ovo e determinar a medida do volume da substância obtida. Teríamos então um valor aproximado do volume do ovo.

Outro processo poderia consistir em mergulhar o ovo num líquido colocado num recepiente e medir a quantidade de líquido que sairia pela acção da introdução do ovo no recepiente.

A terceira via, talvez a mais complicada, seria usar o cálculo integral. Para tal consideraremos que o ovo é a junção de dois sólidos obtidos pela rotação em torno de um eixo de duas regiões planas delimitadas por um quarto de círculo, por um quarto de elipse e pelos eixos coordenados.

Considere o ovo que a seguir se representa, obtido rela rotação em torno do eixo OX da figura representada a tracejado. Use a terceira via para calcular o volume deste ovo.

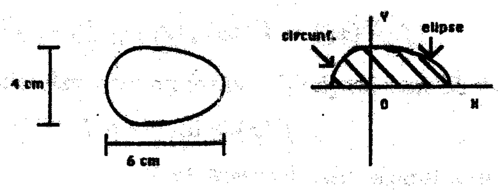

Figura 1: Ovo

FORMULÁRIO:
Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = r^2$. Equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$.

III

1. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in N}$, onde para cada $n \in N$,

$$\begin{array}{rccc} f_n: & [-1,1] & \longrightarrow & R \\ & x & \longrightarrow & e^{-\frac{x}{n}} \end{array}$$

   Mostre que a sucessão de funções $(f_n)_{n\in N}$ converge simplesmente para a função constante igual a 1.

2. Determine a natureza da série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty}(5+\cos nx)\frac{e^n}{n!}, \quad x \in R.$$

3. Determine todos os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{log(n+2)}{n+2}x^{n+2}$$

   é convergente.

4. Mostre que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge e $(b_n)_{n\in N}$ é uma sucessão limitada, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ é convergente.