Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal II

11 de Junho de 2003

Duração: $2^h\ 30^m$

Justifique convenientemente a sua resposta

1. Usando a definição de integral mostre que se $f:[a,b]\to R$ é definida por $f(x)=2$ então
$$\int_a^b f(x)dx = 2(b-a).$$

2. Seja $f:[a,b]\to R$ definida por
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$
   (a) Sabendo que f é uma função contínua e positiva, mostre que F é uma função crescente.

   (b) Se $\phi:[a,b]\to[a,b]$ é uma função derivável tal que $\phi'(x)<0$, para todo o x em $[a,b]$ poderá concluir que G definida por
$$G(x)=\int_a^{\phi(x)} f(t)dt$$
   é decrescente? Justifique.

3. Demonstre o seguinte resultado:

   Se $f:[a,b]\to R$ é contínua e $g:[c,d]\to R$ é uma função derivável, com derivada g' integrável e $g([c,d])\subset[a,b]$ então
$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

   <u>**Sugestão:**</u>Use o facto duma função contínua ser primitivável.

4. Calcule: $\quad a)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx \quad ; \quad b)\ \int_0^1 \frac{e^{arctg x}}{1+x^2}dx \quad ; \quad c)\ \int_1^{+\infty}\frac{lnx}{x^3}dx.$

5. Considere a região S de R^2 definida por
$$S=\{(x,y)\in R^2 : x^2+(y+1)^2\le 2 \wedge x>0 \wedge y>0\}$$
   Calcule a área de S.

II

1. Considere a sucessão de funções

$$\begin{array}{rcl} f :, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \longrightarrow & \frac{2^n \sin nx}{n!} \leq \end{array}$$

(a) Conclua que f_n converge pontualmnte para a função nula.

(b) Será que a convergência é uniforme ?

(c) Será que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em $[0, 1]$?

2. (a) Sejam $(a_n)_{n\in N}$ e $(b_n)_{n\in N}$ duas sucesões numéricas tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in N$$

Prove que, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

(b) Use o resultado anterior para concluirque a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$ é absolutamente convergente.

3. Determine um desenvolvimento em série de potências de x da função $arctg 2x$ bem como os pontos onde essa série converge.

4. (a) Prove que se $f : [-L, L] \rightarrow R$ é uma função contínua e impar então

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$$

<u>**Sugestão:**</u> Efectue uma mudança de variável.

(b) Determine uma série de Fourier em cossenos da função

$$\begin{array}{rcl} f :]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

III

Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1. Se $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ então $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ é convergente.

3. Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} x^{2n}$ então $f^{(2004)}(0) = (-1)^{2004} \frac{2004!}{2^{2004}}$.