Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Análise Infinitesimal II
8 de Julho de 2003

Duração: 2 horas 30 minutos

Justifique convenientemente as suas respostas!

I

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis e, em caso afirmativo, calcule os integrais respectivos.

1,0 (a)

$$f: [0,1] \rightarrow R$$
$$x \rightarrow \begin{cases} 1 \quad , & \text{se } x \text{ racional} \\ 0 \quad , & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$$

2,0 (b)

$$g: [0,10] \rightarrow R$$
$$x \rightarrow \begin{cases} \sin^3 x \quad , & x \in [0,5] \\ \frac{x^3}{(x-1)^2(x+1)} \quad , & x \in]5,10] \end{cases}$$

1,0 2. (a) Prove que se $f : [a,b] \rightarrow R$ é uma função contínua então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

1,0 (b) Use o resultado anterior para mostrar que a equação $6x^5 - 15x^4 + 2x + 1 = 0$ tem uma solução em $[0,1]$.

1,5 3. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno de OY da região S definida por

$$S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y - 2x \leq 0 \wedge x \geq 0\}.$$

Sugestão: $V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$.

1,5 4. (a) Mostre que o seguinte integral impróprio é convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx.$$

1,0 (b) Use o resultado anterior para determinar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{e^x}dx.$$

II

1. Seja $(x_n)_{n \in N}$ uma sucessão tal que para todo $n \in N$,

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq 2(10 - (\frac{1}{10})^n)$$

0,5 (a) Mostre que a sucessão $(T_n)_{n \in N}$ definida por

$$T_n = |x_1| + |x_2| + ... |x_n|$$

é limitada.

0,75 (b) Conclua que $(T_n)_{n \in N}$ é convergente.

1,25 (c) O que pode concluir sobre a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad ?$$

1,0 2. (a) Prove que, se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente.

1,5 (b) Qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n \sin n}{n^2} + \frac{2^n}{n! + 1}\right) \quad ?$$

1,0 3. Verifique que a sucessão de funções $(f_n)_{n \in N}$, onde para cada $n \in N$, $f_n : [0,1] \to R$ é definida por $f_n(x) = x + \frac{x}{n^2}$ converge uniformemente para a função identidade em $[0,1]$.

1,0 4. Use o critério de Weierstrass para provar que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{nx+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{nx} \cdot e} = \left(\frac{x}{e^x}\right)^n \cdot \frac{1}{e}$$

é uniformemente convergente em $[0, 100]$.

Sugestão: Faça um estudo abreviado da função $f_n(x) = \frac{x^n}{e^{nx+1}}$.

1,0 5. (a) Determine todos os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2^{4n}}$$

é convergente.

0,75 (b) Sendo f a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2^{4n}}$$

diga, justificando, se $f'(0)$ é igual a $\frac{32}{361}$.

6. Seja $f : R \to R$ periódica de período 2, definida em $[-1, 1[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x \in [-1, 0[\\ -x + 1 & , \quad \text{se } x \in [0, 1[\end{cases}$$

1,5 (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier desta função.

0,75 (b) Use o resultado anterior para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$