Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Infinitesimal II

7 de Junho de 2004 **Duração:** 2h 30m

Importante: Justifique convenientemente as suas respostas mas escreva apenas o estritamente necessário.

1. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

   (a) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável não negativa e $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, então f é a função nula.

   (b) Sejam P e Q duas partições de $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, então $s(f; P) \leq S(f; Q)$.

2. (a) Defina integral impróprio do tipo I convergente.

   (b) Prove que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\ dx$ é convergente se e somente se $n > 1$.

3. Considere a região $A \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = |x|$.

   (a) Calcule a área de A.

   (b) Determine a equação da recta vertical que divide A em duas regiões com igual área.

4. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)\ x^n$.

   (a) Determine o domínio D de f.

   (b) Determine uma série de Taylor de $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, $x \in D$, e indique o seu intervalo de convergência.

   (c) Utilizando a alínea anterior, prove que $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$, $x \in D$.

   (d) Determine a soma da série

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \frac{7}{64} + \ldots .$$

V.S.F.F. $\rightarrow$

5. Considere a função $f :]1,2[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$.

   (a) Determine uma série de Fourier que contenha apenas termos em senos e convirja para a função f.

   (b) Esboce o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soma da série de Fourier que determinou na alínea anterior.

   (c) Conclua que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Boa Sorte!

Cotação:

1	a)	1.5
	b)	1.5
2	a)	1
	b)	2
3	a)	1
	b)	1
4	a)	1
	b)	2
	c)	2
	d)	2
5	a)	2
	b)	1
	c)	2

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Resolução do Exame de Análise Infinitesimal II

7 de Junho de 2004

1. (a) <u>FALSA</u>. Considere-se a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, se $x \in [0,1[$, e $f(1) = 1$. A função f é não negativa ($f(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$), integrável e $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. No entanto f não é a função nula.

   (b) <u>VERDADEIRA</u>. Dada uma partição P do intervalo $[a,b]$, então, por definição de soma inferior e superior de uma função limitada,

$$s(f;P) \leq S(f;P).$$

   Por outro lado, se Q é uma partição mais fina que P, então

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P).$$

   Sejam P e Q duas quaisquer partições de $[a,b]$. A partição $P \cup Q$ é mais fina que P e que Q, logo

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

2. (a) Seja $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ (resp. $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$) uma função integrável em qualquer intervalo $[a,x]$, $x > a$ (resp. $[x,b]$, $x < b$). O integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{(resp. } \int_{-\infty}^b f(x)\, dx \text{)}$$

   diz-se convergente se existir

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{(resp. } \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\, dt\text{).}$$

   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável em qualquer intervalo limitado, então diz-se que o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente se o forem os integrais $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$, $a \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

(b) Se $n = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,\end{aligned}$$

logo o integral impróprio dado é divergente.

Se $n \neq 1$, tem-se

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right).$$

Por um lado, se $n < 1$, então $-n+1 > 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) = +\infty$. Por outro lado, se $n > 1$, então $-n+1 < 0$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}(-n+1)} - \frac{1}{-n+1}\right)\\ &= 0 + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

Portanto, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$ é convergente se e somente se $n > 1$.

3. (a) As curvas $y = x^3$ e $y = |x|$ intersectam-se nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ logo, o conjunto A é a região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = |x|$, $x \in [0,1]$.

Para $x \in [0,1]$, $x^3 \leq |x| = x$, e portanto a área de A é dada por

$$\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) Seja $x = a$ a recta vertical que divide A em duas regiões com igual área. Então

$$\int_0^a (x - x^3)\,dx = \int_a^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{8} \quad \left(= \frac{\text{área de } A}{2}\right),$$

ou seja $2a^4 - 4a^2 + 1 = 0$, donde $a = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

4. (a) Determinar o domínio de f é determinar o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.

Seja $b_n(x) = |(n+1)x^n|$. Note-se que

$$\lim_n \frac{b_{n+1(x)}}{b_n(x)} = \lim_n \frac{(n+1)|x|}{n} = |x|.$$

Pelo critério de D'Alembert, a série é absolutamente convergente em $]-1,1[$ ($|x|<1$) e divergente em $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ ($|x|>1$). Resta analisar se a série converge nos pontos 1 e -1.

Para $x=1$, vem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1).$ Esta série numérica é divergente pois, por exemplo, o limite do seu termo geral não converge para zero ($\lim\limits_{n}(n+1)=+\infty$).

Para $x=-1$, vem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1).$ Esta série numérica é divergente pois, por exemplo, o limite do seu termo geral não converge para zero ($\lim\limits_{n}(-1)^n(n+1)$ não existe).

Portanto, o domínio de f é $]-1,1[$.

(b) Sendo f definida através da sua série de Taylor (ou série de potências) em torno do ponto $x=0$, sabemos que dentro do intervalo de convergência a podemos integrar termo a termo, isto é,

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(n+1)t^n\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1},\quad x\in]-1,1[.$$

O intervalo de convergência desta série apenas pode diferir do intervalo de convergência da série de potências de f nos pontos -1 e 1.

Para $x=1$ tem-se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}1.$ Esta série numérica é divergente pois, por exemplo, o limite do seu termo geral não converge para zero ($\lim\limits_{n}1=1$).

Para $x=-1$ tem-se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$ Esta série numérica é divergente pois, por exemplo, o limite do seu termo geral não converge para zero ($\lim\limits_{n}(-1)^n$ não existe).

Portanto, o intervalo de convergência da série obtida é $]-1,1[$.

(c) Na alínea anterior viu-se que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=x^2+x^3+x^4+\ldots$.

Dado que

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots,\quad |x|<1\quad\text{(série geométrica)},$$

tem-se

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-x-1=\frac{1}{1-x}-x-1,\quad |x|<1.$$

Além disso, sendo $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ uma primitiva de f, tem-se

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - x - 1\right) = \frac{1}{(1-x)^2} - 1, \quad x \in]-1,1[.$$

(d) Note-se que

$$\begin{aligned} &\frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \frac{7}{64} + \ldots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3. \end{aligned}$$

5. (a) Defina-se uma extensão ímpar de f,

$$\begin{array}{rccl} F_I : &]-2,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x+2, & \text{se } x \in [0,2] \\ -(x+2), & \text{se } x \in]-2,0[\end{cases} \end{array}.$$

Determine-se agora a série de Fourier de F_I (também chamada **série de senos** de f).

Sendo F_I uma função ímpar, os coeficientes de Fourier a_n, $n \geq 0$, são nulos. Resta determinar os coeficientes b_n, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F_I(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx \\ &= \int_0^2 F_I(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx \\ &= \int_0^2 (x+2) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx \\ &= \left[-(x+2)\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx \\ &= \frac{-8}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{4}{n\pi} = \frac{4}{n\pi}(2(-1)^{n+1} + 1). \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de F_I é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}(2(-1)^{n+1} + 1) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

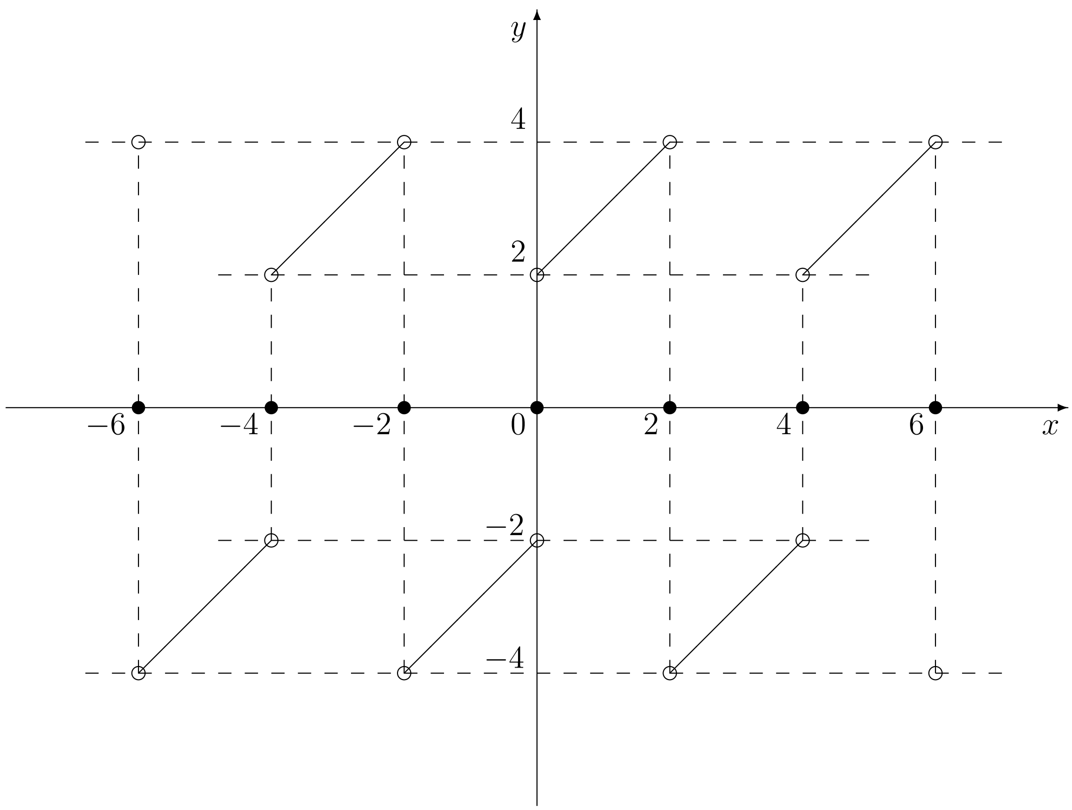
Em $]1,2[$, a função F_I é contínua e coincide com f, logo, neste intervalo, a sua série de Fourier converge para a função f.

Portanto, a série de Fourier de F_I é uma série que contém apenas senos e converge para a função f.

(b) Seja F_P a extensão periódica de F_I de período 4. A série de Fourier determinada na alínea anterior, converge em $\mathbb{R}$ para a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} F_P(x), & \text{se } F_P \text{ é contínua em } x \\ \dfrac{F_P(x^+) + F_P(x^-)}{2}, & \text{se } F_P \text{ não é contínua em } x \end{cases}.$$

A figura abaixo representa o gráfico da função g.



(c) Pela alínea anterior, para $x = 1$, a série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}(2(-1)^{n+1} + 1)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

converge para $F_I(1) = 3$ (F_I é contínua em $x = 1$), isto é

$$\begin{aligned} 3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}(2(-1)^{n+1} + 1)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n)\pi}(2(-1)^{2n+1} + 1)\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) + \frac{4}{(2n-1)\pi}(2(-1)^{2n-1+1} + 1)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\pi) = 0$ e $\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} 3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}(2(-1)^{2n}+1)(-1)^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4.3}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} = \frac{\pi}{4}.$$