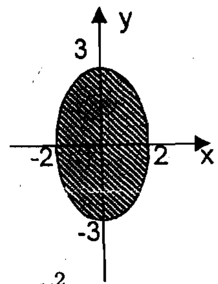
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame Recurso de Análise Infinitesimal II

5 de Julho de 2004 **Duração:** 2h 30m

Importante: Justifique convenientemente as suas respostas mas escreva apenas o estritamente necessário.

1. (a) 0,5 Sem efectuar cálculos, esboce um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ cuja área seja representada pelo integral
$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$



(b) 1 **Utilizando a alínea anterior**, calcule a área da região limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.
(Sugestão: Efectue a mudança de variável adequada de modo a obter o integral da alínea anterior.)

(c) 1 Determine o volume do elipsóide obtido por rotação da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ em torno do eixo OX.

2. (a) 1,5 Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine $\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx$.

(b) 1,5 Averigue para que valores de $n \in \mathbb{N}$, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$ é convergente.

3. (a) 1 Defina série de funções normalmente convergente.

(b) Considere a sucessão de funções $f_n : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \sin(nx)}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

0,5 i. Determine o limite pontual da sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1,5 ii. Prove que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

1 iii. Calcule
$$\lim_n \int_2^3 \frac{(-1)^n \sin(nx)}{x^n}\,dx.$$

1 iv. Prove que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [2, +\infty[$, é normalmente convergente.

4. Seja f a função real de variável real que satisfaz as seguintes condições

$$\begin{cases} f'(x) - f(x) = x \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

(a) Sem resolver a equação diferencial, calcule $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

(Sugestão: Utilize a equação diferencial para obter recursivamente as derivadas de f.)

(b) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $x = 0$ e indique o seu intervalo de convergência.

(c) Comparando a série obtida na alínea anterior com a série de Taylor de e^x, determine f.

5. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ é divergente.

(b) Seja $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ uma série de termos positivos. Se $\lim_n n a_n = 1$, então a série numérica $\sum_n a_n$ é divergente.

(c) Utilizando a regra do trapézio para calcular uma aproximação do integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$, se o intervalo $[0,1]$ for dividido em 150 subintervalos de igual comprimento, então o erro cometido é inferior a 10^{-4}.

(d) A série de Fourier da função definida por $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [-\pi, \pi]$, é

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[10\sin(nx) + \cos(nx)].$$

(e) A série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x^2}\sin x$, converge pontualmente para f.