Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Nome:..

Teste 1 **30 de Março de 2004**

1. (a) Defina **soma inferior** e **soma superior** de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada relativamente a uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$.

   (b) Comente a seguinte afirmação:

   "Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se existir uma partição $\mathcal{P}$ tal que $s(f; \mathcal{P}) = S(f; \mathcal{P})$ então a função é integrável."

2. Diga, justificando, qual das regras de integração numérica (ponto médio, trapézio e Simpson) acha mais adequada para calcular uma aproximação do integral $\int_0^2 -t^2 + 2t \, dt$. (Sugestão: Relembre as ideias subjacentes às definições de cada uma destas regras e analise a função a integrar.)

3. Calcule o volume de uma esfera de raio r.

Formulário:

Regra do ponto médio: $\frac{b-a}{n}\left(f(\bar{x}_1) + ... + f(\bar{x}_n)\right)$; Majoração do erro: $\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$

Regra do trapézio: $\frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$; Majoração do erro: $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$

Regra de Simpson: $\frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right]$; Majoração do erro: $\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal II

Nome:...

Teste 2 **30 de Março de 2004**

1. (a) Defina **função uniformemente contínua**.

   (b) Comente a seguinte afirmação:

   "Se $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções uniformemente contínuas então $f + g$ é uma função uniformemente contínua".

2. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, se $x \in [0, 1[$ e $f(x) = 2 - x$, se $x \in [1, 2]$. Diga, justificando, qual das regras de integração numérica (ponto médio, trapézio e Simpson) acha mais adequada para calcular uma aproximação do integral $\int_0^2 f(t)\, dt$. (Sugestão: Relembre as ideias subjacentes às definições de cada uma destas regras e analise a função a integrar.)

3. Determine o volume de um cone cuja altura mede h e cujo raio da base mede r.

Formulário:

Regra do ponto médio: $\frac{b-a}{n}\,(f(\bar{x}_1) + ... + f(\bar{x}_n))$; Majoração do erro: $\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$

Regra do trapézio: $\frac{b-a}{2n}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$; Majoração do erro: $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$

Regra de Simpson: $\frac{b-a}{6n}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$; Majoração do erro: $\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal II

Nome:...

Teste 3 **30 de Março de 2004**

1. (a) Defina **integral superior** e **integral inferior** de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada.

   (b) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$. Prove, por definição, que $\overline{\int_0^1} f(x)dx = 0$

2. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, isto é, existe uma constante $T > 0$ tal que $h(x + T) = h(x)$. Prove que $\int_0^T h(u)\ du = \int_T^{2T} h(u)\ du.$

3. Todas as manhãs o Francisco sai de casa e vai a caminho da escola na sua nave supersónica. Depois de andar 10 metros à velocidade de 1 m/s, ele decide começar a andar a uma velocidade proporcional à distância já percorrida. Quanto tempo demora o Francisco a chegar à escola, sabendo que esta dista 10 000 metros de sua casa.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal II

Nome:...

Teste 4 **30 de Março de 2004**

1. (a) Defina função **primitivável** e função **integrável** num intervalo $[a,b]$.

   (b) Comente a seguinte afirmação: "Toda a função integrável é primitivável".

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = t^2 + 3t + 2$. Determine o valor médio da função f no intervalo $[0,x]$, $x \in \mathbb{R}$.

3. A Maria pesava 180 kgs e resolveu fazer dieta. Após 10 dias de dieta, a Maria emagreceu 30 kgs. Além disso, notou que, em cada dia, a perda de peso era proporcional ao seu peso . Determine uma equação diferencial que descreva o comportamento do peso da Maria durante o período de dieta e faça uma estimativa de quanto tempo demorará até que ela atinja os 125 kg.