Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal II

Nome:..

Teste 5 **25 de Maio de 2004**

1. (a) Defina série numérica simplesmente convergente.

   (b) Comente a seguinte afirmação:

   "Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é divergente."

2. (a) Utilizando uma série de potências conveniente, prove que

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

   (b) Determine o conjunto onde a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{(n-1)!}$ é pontualmente convergente e calcule

$$\lim_{n} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{(n-1)!}.$$

   (c) Prove que a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{(n-1)!}$ é contínua em $]-\infty, 0]$ e calcule, se existir, o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal II

Nome:..

Teste 6 **25 de Maio de 2004**

1. (a) Defina série numérica absolutamente convergente.

   (b) Comente a seguinte afirmação:

   "Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é divergente."

2. (a) Prove que a série de Taylor da função $\frac{1}{(1+x)^2}$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}.$$

   (b) Determine o seu intervalo de convergência.

   (c) Utilizando séries de potências calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{x}.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal II

Nome:..

Teste 7 **25 de Maio de 2004**

1. (a) Enuncie o critério de Leibnitz sobre convergência de séries numéricas.

   (b) Comente a seguinte afirmação:

   "Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é divergente."

2. Considere a sucessão de funções $f_n : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \sin(nx)}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Averigue se a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

   (b) Calcule

$$\lim_n \int_2^3 \frac{(-1)^n \sin(nx)}{x^n}\, dx.$$

   (c) Prove que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [2, +\infty[$ é normalmente convergente.