Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame (2h30m) 20/JUN/2005

1. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. As seguintes afirmações são falsas; para cada uma, apresente um contra-exemplo:

   (a) Se f é uma função não identicamente nula em $(-\pi, \pi]$ então a sua série de Fourier também é uma função não identicamente nula em $(-\pi, \pi]$;

   (b) Se f é uma função não-negativa, não integrável à Riemann em $[0, 1]$ e g é tal que $g(x) \geq f(x)$, para todo o $x \in [0, 1]$, então g também não é integrável à Riemann.

3. (a) Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo limitado $[a, X]$, para $X > a$. Diga o que significa o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ser convergente.

   (b) Sejam $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integráveis em $[a, X]$, para todo o $X > a$. Suponha que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$ e que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é convergente. Demonstre que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também é convergente.

   (c) Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{2e^{2x}}\, dx$.

(V.S.F.F.)

4. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

   (a) Calcule, para cada $x \in [0,1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

   (b) Mostre que é válida a igualdade

$$\int_0^1 f(x)\,dx \ = \ \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) \ .$$

   (c) Averigue se a convergência $f_n \to f$ é uniforme.

5. (a) Desenvolva em série de potências de x a função $\arctan x$.

   (b) Determine uma primitiva da função $g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

   (c) Desenvolva g em série de potências de x.

6. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \ , \quad x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right] \ ; \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

   (a) Prove que f é integrável em $[0,1]$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Cotação:

1.(a) **1.5**	2.**2.0**	3.(a) **1.0**	4.(a) **1.0**	5.(a) **2.0**	6.(a) **1.5**
(b) **1.5**		(b) **1.5**	(b) **1.5**	(b) **1.5**	(b) **1.0**
		(c) **1.5**	(c) **1.5**	(c) **1.0**	