Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

1ª Frequência (2h00m) 13/ABR/2005

1. Seja g uma função positiva e com derivada contínua em $\mathbb{R}$ tal que $g(0) = 1$ e $g(2) = e^2$. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\ln(g(x))\,dx$.

2. Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

   (a) Defina soma inferior e soma superior de φ relativamente a uma partição do intervalo $[a,b]$.

   (b) Mostre que se φ for não-decrescente então φ é integrável em $[a,b]$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad .$$

   (a) Mostre que f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]$.

   (b) Calcule $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Mostre que F não é diferenciável em $[-1,1]$.

   (d) Porque não está (c) em contradição com o Teorema Fundamental do Cálculo?

(V.S.F.F.)

4. As seguintes afirmações são falsas; para cada uma, apresente um contra-exemplo:

   (a) se f é não-negativa e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ então $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,2]$;

   (b) se uma função é integrável em $[a,b]$ então tem uma primitiva em $[a,b]$;

   (c) se $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [1,+\infty)$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente então $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ também é convergente.

5. Calcule o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo OX da região plana

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\;;\quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{\sin x + \cos x + 1}} \right\}.$$

6. Seja $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e não-crescente. Prove que se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente então

$$\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0\,.$$

Cotação:

1.(*a*) **1.5**	2.(*a*) **1.0**	3.(*a*) **1.5**	4.(*a*) **1.0**	5. **3.5**	6. **1.5**
(*b*) **2.5**	(*b*) **1.5**	(*b*) **1.5**	(*b*) **1.0**		
		(*c*) **1.0**	(*c*) **1.5**		
		(*d*) **1.0**			