Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame especial 16* (3h00m) 25/JUL/2005

1. Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências com coeficientes inteiros e raio de convergência r. Supondo que uma infinidade de coeficientes são não nulos, mostre que $r \leq 1$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $G_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$G_f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{se} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

   (a) Determine α de modo a que G_f seja contínua em $\mathbb{R}$.

   (b) Prove que G_f é constante se, e só se, f é constante.

   (c) Prove que o contradomínio de G_f está contido no de f.

   (d) Mostre que se $f(x) = x\, G_f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, então f é identicamente nula.

   (e) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, dê um exemplo de uma função f (contínua em $\mathbb{R}$) sem limite em $+\infty$ e tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} G_f(x) = \lambda$.

3. Efectue explicitamente uma reordenação dos termos da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

de modo a obter uma série com soma igual a zero.