DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame (2h 30m) 12 /JUN /2006

---

1. (a) Com base na definição, prove que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt \quad , c > 0 .$$

(**Sugestão:** note que, se $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$, então

$P^* = \{ct_0, \cdots, ct_n\}$ é uma partição de $[ca, cb]$).

(b) Suponha que f é contínua e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Prove que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l .$$

(c) Considere um cone de altura h e raio da base r. Usando cálculo integral, determine o volume do cone.

2. (a) Verifique se existe uma função g tal que

$$\int_0^{x^2} t\ g(t)\,dt = x + x^2 .$$

(b) Seja f contínua em $[a,b]$. Demonstre que a função definida em $[a,b]$ por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f em $[a,b]$.

3. Determine:

(a) a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+2n}$;

(b) o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4. (a) Seja $f : [a,+\infty) \to$ uma função integrável em $[a, X]$, para todo o $X > a$.

Demonstre que, se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é absolutamente convergente, então é convergente.

(b) Prove que o integral impróprio $\int_\pi^{+\infty} \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\,dt$ é condicionalmente convergente.

5. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in N}$, com $f_n(x) = \frac{sin\ nx}{n^3}$.

   (a) Calcule, para cada x, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

   (b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$. Prove que $\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

   (c) Averigue se a convergência $f_n \to f$ é uniforme.

6. (a) Determine o desenvolvimento em série de potências de x da função f definida por $f(x) = cosh\, x$, bem como os pontos onde a série é convergente.

   (b) Determine a série de Taylor da função $sinh\, x - cosh\, x$, em torno de $a = 0$, com resto de Lagrange de ordem 3.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame/1ª Parte (1h 30m) 12 /JUN /2006

1. (a) Com base na definição, prove que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_{a}^{b} f(ct)dt \quad , c>0 .$$

(**Sugestão:** note que, se $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$, então

$P^{*}=\{ct_0,\cdots,ct_n\}$ é uma partição de $[ca, cb]$).

(b) Suponha que f é contínua e que $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$. Prove que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt = l .$$

(c) Considere um cone de altura h e raio da base r. Usando cálculo integral, determine o volume do cone.

2. (a) Verifique se existe uma função g tal que

$$\int_{0}^{x^2} t\ g(t)\,dt = x + x^2 .$$

(b) Seja f contínua em $[a,b]$. Demonstre que a função definida em $[a,b]$ por

$$G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$$

é uma primitiva de f em $[a,b]$.

3. (a) Suponha que f' é integrável em $[0 , 1]$ e $f(0)=0$. Prove que , para todo o x em $[0 , 1]$, se tem

$$|f(x)| \le \sqrt{\int_{0}^{1} |f'(x)|^{2}\,dx} .$$

(b) Determine a fórmula de Taylor em torno de $a=0$, com resto integral para a função

$$f(x)=\cosh x .$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame/2ª Parte (1h 30m) 12 /JUN /2006

4. Determine:

(a) a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+2n}$;

(b) o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

5. (a) Seja $f:[a,+\infty)\to$ uma função integrável em $[a,X]$, para todo o $X>a$.

Demonstre que, se o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é absolutamente convergente, então é convergente.

(b) Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\,dt$ é condicionalmente convergente.

6. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in N}$, com $f_n(x)=\dfrac{sin\ nx}{n^3}$.

(a) Calcule, para cada x, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Seja $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$. Prove que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

(c) Averigue se a convergência $f_n\to f$ é uniforme.

6. Determine o desenvolvimento em série de potências de x da função f definida por $f(x)=cosh\,x$, bem como os pontos onde a série é convergente.