Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

Exame de Recurso (2h30m) 10/JUL/2006

(Este exame tem **6 perguntas** em **duas páginas**.)

1. (a) Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Com base na definição, demonstre que f é integrável em $[a, b]$.

   (b) Considere a região plana

   $$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \ \text{ e } \ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

   Mostre que:

   (i) A tem área ilimitada;

   (ii) o sólido gerado pela rotação de A em torno de Ox tem volume limitado.

2. (a) Determine a natureza das séries numéricas

   $$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log n}; \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right].$$

   (b) Dê exemplos de duas séries numéricas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tais que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são divergentes e $\sum (a_n + b_n)$ é absolutamente convergente.

3. (a) Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções contínuas num intervalo I, convergindo uniformemente para f em I. Demonstre que f é contínua em I.

   (b) Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções definidas no intervalo I tais que:

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in]-\infty, n] \cap I \\ x - n, & \text{se } x \in]n, +\infty[\cap I. \end{cases}$$

   Determine o limite pontual de $\{f_n\}$ e diga se esse limite é uniforme nos seguintes casos:

   (i) $I = [20, 120]$; (ii) $I = \mathbb{R}$.

4. Para cada uma das séries de potências

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^{2n},$$

   (i) ache o seu raio de convergência;

   (ii) determine a sua natureza nos extremos do intervalo de convergência.

   (c) Dê um exemplo de uma série de potências que seja simplesmente convergente em ambos os extremos do intervalo de convergência.

5. (a) Sendo f integrável em $[a, b]$, seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

   Dê um exemplo de uma função f tal que

$$\text{existe } \ x_0 \in]a, b[\ \text{ tal que } \ F'(x_0) \neq f(x_0).$$

   (b) Calcule

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}\, dx.$$

6. (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor das funções

$$f(x) = \log|x+2| \quad \text{ e } \quad g(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad \text{ em torno de } x = 0.$$

   (b) Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Calcule $h^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}$.