Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE INFINITESIMAL II

(Licenciatura em Matemática)

2ª Frequência (1h30m) 02/JUN/2006

(Este exame tem **5 perguntas** em **duas páginas**.)

1. Considere a sucessão de funções definidas em $[0,a]$, $\{f_n\}_{n\geq 1}$, definidas por

$$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

   (a) Mostre que esta sucessão converge pontualmente para f, com $f(x) = x$.

   (b) Será a convergência uniforme? Justifique.

2. **Duas** das seguintes afirmações são verdadeiras. Identifique-as justificando a resposta.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,dx$ é convergente.

   (b) Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,x]$, para todo o $x > a$. Se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então é também absolutamente convergente.

   (c) Seja r o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ e seja $\rho \in (0,r)$. Então, a série converge uniformemente em $[-\rho,\rho]$.

   (d) O raio de convergência de uma série de potências é sempre um número real $r \geq 0$.

3. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \arctan(x^2).$$

   (a) Obtenha uma série de potências para f'.

   (b) Usando (a), obtenha uma série de potências para f.

(c) Diga em que pontos é que a série converge absolutamente, converge simplesmente e diverge.

4. (a) Determine para que inteiros positivos k a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ é convergente.

   (b) Determine uma aproximação da soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ com erro inferior a $0,01$.

5. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos. Mostre que:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ é convergente.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ nem sempre é convergente.

   (c) Se $a_n \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é divergente.